序

张量是数学、物理和力学等学科的必备工具，也是数学的一个重要分支，物理和力学等学科的发展又促进了这一数学分支的充实和完善。用数学描述自然界物理现象的变化及其运动规律需要引入坐标系。然而，本来与坐标系选择无关的自然规律，其数学表述形式却不得不与坐标系的选择联系在一起，而导致人们对其物理实质不易辨识。张量的引入，则是力图既采用坐标系而又摆脱具体坐标系影响的微妙方法。用张量描述自然界物理现象演变规律所得的结果，在任何坐标系下具有不变的形式，这给人们带来极大的方便。由于用张量演绎的结果和获得的方程在坐标变换时具有不变性，所以在本质上具有普遍性，从而张量为基本方程（本构方程）的推导提供了非常有效的数学方法。同时，由此获得的方程对不同概念的统一和特殊概念的推广极有启发。

美是大自然的固有属性，数学中的美在张量的表述中显得尤为突出。张量演算中符号的简洁和对称的外观使得张量最适于对自然规律作精练的描述。然而，张量演算中上下标的“多姿”变换却会使初学者产生一定的畏惧心态。其实，只要掌握其变换规律即会由“心烦”变为美的享受。

我执教的半个世纪中，一直都在从事数学、力学和与土木、机械相关的专业课程的教学和研究工作，对培养具有坚实的数学、力学基础的大学生和研究生体会得非常深刻。因而，20 世纪 80 年代初我在华中工学院讲授“张量分析”课程 8 年之后，1996 年由华中理工大学出版社出版了我撰写的《张量分析及演算》，三年里该书畅销一空。多年来，我收到许多教师、研究生关于此书再版的要求。为了满足读者的需要，经过两年的努力，该书的修订本《张量分析及应用》终于和大家见面了。

本书第 1、2 章介绍矢量分析和矩阵，是学习张量的基础知识；第 3～6 章介绍张

量、张量代数、张量分析和黎曼空间的曲率，是本书的主题；第 7、8 章讲述张量分析在固体力学中的应用，特别是在损伤力学中的应用，其中第 8 章的内容取自我的《损伤理论及其应用》(国防工业出版社，1998)。鉴于现代教学和研究工作中计算机技术的广泛应用，新增了第 9 章，介绍 MATLAB 在矩阵和张量运算中的应用，也是本书的特色之一。附录 A～C 分别简述经典的例题、正规正交化和曲线坐标系；附录 D 提供部分习题的证明或解题的全过程，可供教师和自学者参考。

本书系统阐述张量分析及其在固体力学中的应用，可作为大学数学、物理、力学、材料、天文、土木、水利、交通、航空、航天、信息和管理学科的研究生、高年级大学生的教材，还可供相关专业的研究人员及工程技术人员参考。

从 20 世纪 50 年代末到 80 年代初，我受到李灏教授的谆谆教诲，在此对导师再一次表示深切的怀念。我的学生毛为民博士参与了本书的修订工作，其中第 7、9 两章由他撰写，全书由我统稿和审定。清华大学出版社的编辑佟丽霞、赵从棉给予了很大的支持，在此一并表示感谢。

我的许多朋友和学生，在使用和学习了我的原作后，对其提过很多宝贵的意见和建议，对本书的修订工作起到了积极作用。感谢同行的老师和学生们对本书的厚爱，还希望今后给予更多的支持和关心。

作者水平有限，如有不妥之处，恳请给予批评指正。

余天庆

2005 年 10 月于武昌

目　　录

第 1 章
矢量分析

本章首先介绍矢量代数的基本运算规则，然后介绍矢函数的微积分。标量场的梯度、矢量场的散度和矢量场的旋度都做了详细的推导。列出了梯度、散度和旋度的运算公式，有利于学生掌握矢量在场论中的应用。重点是梯度、散度、旋度的演算以及 Green 公式、Stokes 定理和 Gauss 散度定理的推导和应用。

1.1 标量与矢量

1. 标量

仅由数量确定的物理量，或由一个具有实数值的、空间一点的函数所确定的物理量，称为标量。

假若标量与坐标系的选择无关，则称为绝对标量，或不变量。例如，任何实数、质量、密度、长度、时间、温度和力做的功、能量等。

今后，凡谈到诸如张量一类的标量，都是指绝对标量。在研究张量的解析性质时，还将遇到与坐标系选择有关的标量。

2. 矢量

我们先把用数值（大小）和方向表征的物理量称为矢量。矢量用黑体小写拉丁字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\cdots;\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\cdots$ 表示。作图时用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示（图 1.1）。有向线段的长度表示

矢量的大小或模。矢量的大小(模)记为

$$|\boldsymbol{a}| = a \tag{1.1}$$

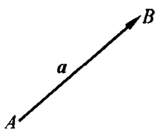


图 1.1

固结于空间某一点(作用点)的矢量称为固定矢量,沿着某一直线但没有一定作用点的矢量称为滑动矢量,既无一定作用线又无一定作用点的矢量称为自由矢量。本书所讨论的矢量代数运算适用于自由矢量。

应当指出,不是凡具有数值与方向的物理量都能作为矢量,矢量还应具有由矢量代数运算规则(见1.2节)所确定的特性。

当代表两矢量的线段是平行的,则称两矢量为平行矢量或共线矢量。当两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有相等的模,共线且同向时(图1.2),则称两矢量相等,即

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{1.2}$$

若两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等,共线反向时(图1.3),记为

$$\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b} \tag{1.3}$$

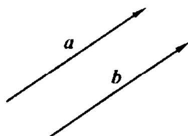


图 1.2

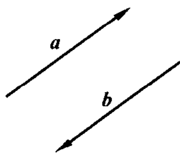


图 1.3

3. 矢量的投影与分量

矢量 $\boldsymbol{v}$ 用有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 表示(图1.4),过矢量始端 O 建立坐标系 $O\eta\zeta$。过矢量末端 P 分别向两坐标轴作垂线,得矢量 $\boldsymbol{v}$ 在两坐标轴 $O\eta, O\zeta$ 上的投影 OM, ON,分别记为 v_1, v_2。过 P 点分别做两坐标轴的平行线,得矢量 $\boldsymbol{v}$ 沿两坐标轴 $O\eta, O\zeta$ 的分量 $\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$,记为 v^1, v^2。由图1.5可知 $OQ=RP, OR=QP$。若两坐标轴之间的夹角为 θ,则

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v^1 + v^2\cos\theta \\ v_2 &= v^1\cos\theta + v^2 \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

和

$$\left.\begin{aligned} v^1 &= v_1\csc^2\theta - v_2\csc\theta\cot\theta \\ v^2 &= -v_1\csc\theta\cot\theta + v_2\csc^2\theta \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

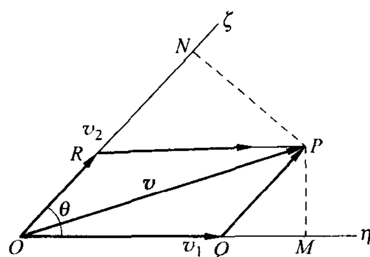


图 1.4

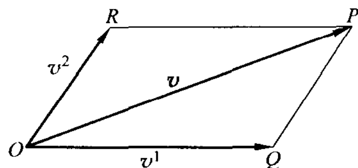


图 1.5

注意，本书中的上标一般不表示乘幂，平方用$(v)^2$;$(x)^2$ 表示。但在不会引起误会的演算中，有时仍用上标表示乘幂。

在直角坐标系里，矢量的投影与分量相等。

1.2 矢量的加法

1. 矢量加法的平行四边形法则

用有向线段$\overrightarrow{OQ}$,$\overrightarrow{OR}$分别表示矢量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$，以$\overrightarrow{OQ}$,$\overrightarrow{OR}$为邻边所构成的平行四边形的对角线$\overrightarrow{OP}$，即为矢量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的合矢量 $\boldsymbol{v}$，记为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \tag{1.6}$$

这就是矢量加法的平行四边形法则。一切矢量应该遵守矢量加法法则。矢量加法法则确定了矢量的第三个必要特性。因此，能用有向直线段表示的、且遵守平行四边形加法运算法则的物理量或几何量称为矢量。

矢量减法是矢量加法的逆运算。式(1.6)可改写为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{b} \tag{1.7}$$

或

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{b}) \tag{1.8}$$

容易证明矢量加法满足交换律和结合律，即

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} \tag{1.10}$$

2. 单位矢量

模为 1 的矢量称为单位矢量。模 $a \neq 0$ 的矢量 $\boldsymbol{a}$，沿 $\boldsymbol{a}$ 方向的单位矢量记为

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{a}}{a} \tag{1.11}$$

任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示为与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位矢量 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的模 a 的乘积，即

$$\boldsymbol{a} = a\hat{\boldsymbol{a}} \tag{1.12}$$

在三维欧几里得空间里，沿直角坐标轴 x,y,z 的单位矢量用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 或 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$①表示。

3. 矢量沿直角坐标轴的分量

在三维欧几里得空间里，任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示为沿正交的三个坐标轴 x,y,z 的分矢量 $a_1\boldsymbol{i},a_2\boldsymbol{j},a_3\boldsymbol{k}$ 的矢量和(图 1.6)，即

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \tag{1.13}$$

$\boldsymbol{a}$ 的模是

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$$

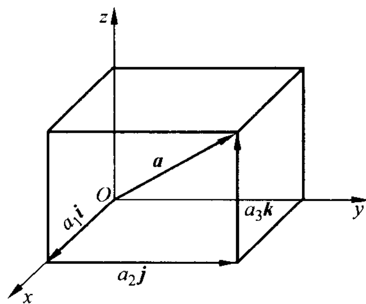


图 1.6

例 1.1 写出三维空间笛卡儿直角坐标系中 $P(2,4,3)$ 和 $Q(1,-5,2)$ 两点的位矢方程，并分别用作图法和解析法求这两位矢的合矢量。

解 (1) $\boldsymbol{r}_1 = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP}$
$= 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EQ} = \boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

(2) 作图法

作 $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}_1$，$\overrightarrow{OQ} = \boldsymbol{r}_2$，以 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ 为邻边作平行四边形 $OPRQ$，画对角线 $\overrightarrow{OR}$ (图 1.7)，即得 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ 的合矢量 $\overrightarrow{OR} = \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2$。

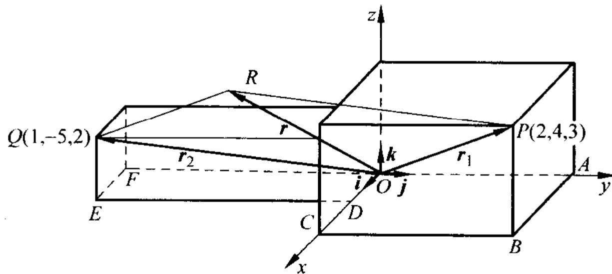


图 1.7

① $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$；$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 等通常都是用来表示沿坐标轴的单位矢量，字母上面的ˆ略去。

解析法

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 = (2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) + (\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) \\ &= 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

例 1.2 试求平行于 $\boldsymbol{r}_1$,$\boldsymbol{r}_2$ 两矢量的合矢量 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量,已知 $\boldsymbol{r}_1 = 2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$。

解 合矢量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 = (2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}) + (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) \\ &= 3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

$$r = |\boldsymbol{r}| = |3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}| = \sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (-2)^2} = 7$$

所以,平行于 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量为

$$\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}}{7} = \frac{3}{7}\boldsymbol{i} + \frac{6}{7}\boldsymbol{j} - \frac{2}{7}\boldsymbol{k}$$

验证

$$\left|\frac{3}{7}\boldsymbol{i} + \frac{6}{7}\boldsymbol{j} - \frac{2}{7}\boldsymbol{k}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2} = 1$$

1.3 矢量的标量积

1. 矢量与标量的乘积

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与标量 m 的乘积是矢量 $m\boldsymbol{a}$,这个矢量的模是矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模的 m 倍,方位与 $\boldsymbol{a}$ 相同;指向由 m 的正负号而定,m 为正时,$m\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 指向相同,否则相反。若 $m=0$,则 $m\boldsymbol{a}$ 为零矢量。

若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是矢量,m 和 n 是标量,则

$$\left.\begin{aligned} m\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}m && \text{交换律} \\ m(n\boldsymbol{a}) &= (mn)\boldsymbol{a} && \text{结合律} \\ (m+n)\boldsymbol{a} &= m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{a} \\ m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= m\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b} \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

2. 矢量与矢量的标量积

空间某一 x 轴的方向由轴的单位矢量确定。以 $\boldsymbol{e}$ 表示 x 轴的单位矢量,以 a_x 表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴方向的投影,并称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与单位矢量 $\boldsymbol{e}$ 的标量积(又称点积)。如图 1.8 所示,其表达式为

$$a_x = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e} = |\boldsymbol{a}| \cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{1.15}$$

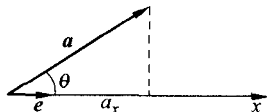


图 1.8

式中,$\cos\theta$ 是矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{e}$ 的正方向夹角的余弦。

同样可确定矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的标量积。考虑矢量 $\boldsymbol{a}$

在矢量 $\boldsymbol{b}$ 方向的投影 a_b，可得

$$a_b = \boldsymbol{a} \cdot \hat{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{b} = a\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

由此得到

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = a_b b = b_a a \tag{1.16}$$

三维空间里，正交坐标轴单位矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的标量积

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1 \tag{1.17}$$

$$\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} = 0 \tag{1.18}$$

将矢量表示为沿坐标轴的分矢量的矢量和，$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}) \cdot (b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\end{aligned} \tag{1.19}$$

还有

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = (a)^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 \tag{1.20}$$

若 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}=0$，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都不是零矢量，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互相垂直。

容易证明，标量积满足交换律和分配律，即

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \tag{1.21}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} \tag{1.22}$$

还有

$$m(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (m\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (m\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})m \tag{1.23}$$

例 1.3 求矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 之间的夹角。

解 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}=ab\cos\theta$

$$a=\sqrt{(2)^2+(2)^2+(-1)^2}=3$$

$$b=\sqrt{(6)^2+(-3)^2+(2)^2}=7$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (2)\times(6)+(2)\times(-3)+(-1)\times(2) \\ &= 12-6-2=4\end{aligned}$$

于是

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{ab} = \frac{4}{3\times 7} = 0.1905$$

$$\theta = 79°1'$$

例 1.4 求矢量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 在矢量 $\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$ 上的投影。

解 矢量 $\boldsymbol{b}$ 沿其自身的单位矢量

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{b}}{b} = \frac{4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}}{\sqrt{(4)^2+(-4)^2+(7)^2}} = \frac{4}{9}\boldsymbol{i} - \frac{4}{9}\boldsymbol{j} + \frac{7}{9}\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{b}} &= (\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{4}{9}\boldsymbol{i}-\frac{4}{9}\boldsymbol{j}+\frac{7}{9}\boldsymbol{k}\right)\\
&= (1)\times\left(\frac{4}{9}\right)+(-2)\times\left(-\frac{4}{9}\right)+(1)\times\left(\frac{7}{9}\right)=\frac{19}{9}
\end{aligned}
$$

例 1.5 矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ 和矢量 $\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 决定一平面，试求垂直于此平面的单位矢量。

解 设垂直于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平面的矢量 $\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{c}$ 既垂直于 $\boldsymbol{a}$ 又垂直于 $\boldsymbol{b}$，所以

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=2c_1-6c_2-3c_3=0$$

即

$$2c_1-6c_2=3c_3 \tag{a}$$

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=4c_1+3c_2-c_3=0$$

即

$$4c_1+3c_2=c_3 \tag{b}$$

联立解式(a)、(b)得

$$c_1=\frac{1}{2}c_3,\quad c_2=-\frac{1}{3}c_3$$

$$\boldsymbol{c}=c_3\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{1}{3}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\right)$$

于是 $\boldsymbol{c}$ 的单位矢量为

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{c}}=\frac{\boldsymbol{c}}{c} &= \frac{c_3\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{1}{3}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\right)}{\sqrt{c_3^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+(1)^2\right]}}\\
&= \pm\left(\frac{3}{7}\boldsymbol{i}-\frac{2}{7}\boldsymbol{j}+\frac{6}{7}\boldsymbol{k}\right)
\end{aligned}
$$

例 1.6 试证 $\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{i}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{j}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}$，式中 $\boldsymbol{a}$ 为一任意矢量。

证 因为 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=a_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=a_1$$

同理

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}=a_2,\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}=a_3$$

于是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}\\
&= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{i}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{j}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

1.4 矢量的矢量积

两矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的矢量积(简称矢积,又称叉积)是一矢量 $\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{c}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的模与两矢量夹角的正弦 $\sin\theta$ 的乘积,$\boldsymbol{c}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 平面,且 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 构成右手系(图 1.9),表示为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{1.24}$$

$$c=ab\sin\theta \tag{1.25}$$

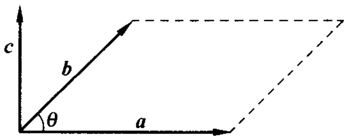


图 1.9

由图 1.9 很容易看出,交换律对矢量的矢量积是不成立的,且

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} \tag{1.26}$$

若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,因为 $\sin\theta=0$,所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$。

由定义容易证明,笛卡儿直角坐标系单位矢量的矢积有如下关系:

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0} \tag{1.27}$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}&=-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}&=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}&=-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\end{aligned}\right\} \tag{1.28}$$

利用这些关系,可以求得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\times(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\ &=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\end{vmatrix} \tag{1.29}$$

可以证明,分配律对矢量的矢积是成立的,即

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} \tag{1.30}$$

设 m 是标量,有

$$\begin{aligned}m(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=(m\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}\\ &=\boldsymbol{a}\times(m\boldsymbol{b})\\ &=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})m\end{aligned} \tag{1.31}$$

例 1.7 设 $\boldsymbol{a}$ 既垂直于 $\boldsymbol{b}$,又垂直于 $\boldsymbol{c}$,试证 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$。

证 因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一垂直于 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 平面的矢量,该矢量的模是 $ab\sin90°=ab$,或称 ab 的模,也就是说,这个矢量是 $\boldsymbol{b}$ 乘以 a,再将 ab 转 90°,如图 1.10 所示。

同理,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ 是一垂直于 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}$ 平面的矢量，这个矢量是 $\boldsymbol{c}$ 乘以 a,再转 90°至图 1.10 所示位置。

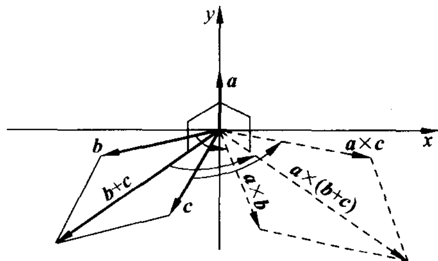


图 1.10

用同样的办法可推知,$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$是矢量$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$乘以 a,再转 90°至图 1.10 所示位置。

因为 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$是以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行四边形的对角线，所以有

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$$

例 1.8 若 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，求 (1)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；(2)$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；(3)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$。

解 (1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})\times(\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -3 & -1\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix}$

$=10\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k}$

(2) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\times(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 4 & -2\\ 2 & -3 & -1\end{vmatrix}$

$=-10\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}$

与(1)的结果比较，验证了 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$。从两个行列式也容易看出，行列式的两行调换后,行列式的值改变一次正负号。

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})+(\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})-(\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})=\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

于是

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})&=(3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})\times(\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\\&=-20\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-22\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

例 1.9 矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 决定一平面,求垂直于该平面的单位矢量。

解 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 所决定的平面,设 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,有

$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15i - 10j + 30k$$

$$\hat{c} = \frac{a \times b}{|a \times b|} = \frac{15i - 10j + 30k}{\sqrt{(15)^2 + (-10)^2 + (30)^2}} = \frac{3}{7}i - \frac{2}{7}j + \frac{6}{7}k$$

与此反向的另一单位矢量是$-\frac{3}{7}i+\frac{2}{7}j-\frac{6}{7}k$，与例1.5求得的结果一致。

1.5 矢量的三重积

考察矢量a,b,c的混合乘法$(a\times b)\cdot c$，乘积是一标量。由图1.11可以看出，这个标量的绝对值等于由矢量a,b,c所构成的平行六面体的体积，即

$$V = (a \times b) \cdot c \tag{1.32}$$

V的正负号与矢量a,b,c的相互位置有关。若矢积$a\times b$与矢量c构成锐角，则$V>0$，此时三矢量a,b,c是右手系(图1.11)。反之，若$V<0$，三矢量a,b,c是左手系。

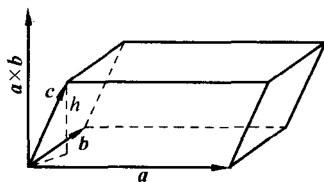


图 1.11

若循环置换矢量a,b,c的次序，即考察b,c,a与c,a,b矢量组，循环置换后不会改变原来的旋转方向，即原来是右手系的矢量组，循环置换后，仍然是右手系，且其乘积不变，即

$$V = a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b) \tag{1.33}$$

这一点很容易从行列式的性质得到证明。

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^{①} \tag{1.34}$$

行列式连续进行两次行的对调，不改变行列式的值和正负号。

若矢量a,b,c共面，则$a\cdot(b\times c)=0$，反之亦然。

下面考察

$$d = a \times (b \times c) \tag{1.35}$$

① 式(1.34)的证明见例1.10。

由矢积的定义可知，$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$与 $\boldsymbol{d}$ 是共面的，亦即 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 三矢量共面，于是 $\boldsymbol{d}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$，因此，可以将矢量 $\boldsymbol{d}$ 分解为沿矢量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的分量，即

$$\boldsymbol{d}=\alpha\boldsymbol{b}+\beta\boldsymbol{c}$$

式中，α,β 是标量。因为 $\boldsymbol{d}\perp\boldsymbol{a}$，故有

$$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$$

$$\frac{\alpha}{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}=-\frac{\beta}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}=\lambda$$

即

$$\alpha=\lambda\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a},\quad \beta=-\lambda(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})$$

于是

$$\boldsymbol{d}=\lambda[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})] \tag{1.36}$$

式(1.36)是一个恒等式，对任意的矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 皆成立。因此，λ 是一个不变的常数。为了求出 λ 的值，令 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 在直角坐标系中的表达式为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{b}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{c}=\boldsymbol{j}$$

则

$$\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})=\lambda[\boldsymbol{i}(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})-\boldsymbol{j}(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})]$$

所以

$$\lambda=1$$

而与矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的选择无关。

最后得

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \tag{1.37}$$

结合律对于三重积不成立，即

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})&\neq(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\\(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}&=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\end{aligned}\right\} \tag{1.38}$$

式(1.38)的证明如下。

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

用 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 代替式(1.37)中的 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，即得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}&=-[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})]\\&=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\end{aligned}$$

例 1.10 若 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k},\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$，试证

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

证 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$

$$= (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \cdot [(b_2c_3 - b_3c_2)\boldsymbol{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\boldsymbol{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\boldsymbol{k}]$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

例 1.11　若 P,Q,R 三点不在一直线上，用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 分别表示这三点的位置矢量，试证矢量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 垂直于 P,Q,R 三点所决定的平面。

证　设矢量 $\boldsymbol{r}$ 为 P,Q,R 三点所决定的平面内任一点的位置矢量，则矢量 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ 共面。于是

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}) \cdot [(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})] = 0$$

或

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = 0$$

所以矢量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 垂直于矢量 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}$，亦即垂直于 P,Q,R 三点所决定的平面。

例 1.12　试证

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{b}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})] - \boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})] = \boldsymbol{c}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})] - \boldsymbol{d}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]$$

证　由式(1.37)有

$$\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{c})$$

令 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，则有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{c}[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{d}] - \boldsymbol{d}[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}] = \boldsymbol{c}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})] - \boldsymbol{d}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]$$

根据式(1.38)有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{q} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{q}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{q})$$

令 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$，则

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{b}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})] - \boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]$$

1.6　对偶基矢量[①]

设有两组基矢量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3$，若

---

① 本节各除式中的分母均为标量。两个矢量的比不等于矢量，而是四元数。矢量“除法”运算在一定意义上已超出了矢量代数的范围。

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1 &= \frac{\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3} \\ \boldsymbol{e}'_2 &= \frac{\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3} \\ \boldsymbol{e}'_3 &= \frac{\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3} \end{aligned}\right\} \tag{1.39}$$

式中 $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 \neq 0$，则

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}'_3 = 1 \tag{1.40}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}'_1 = 0 \\ \boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}'_2 = 0 \\ \boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}'_3 = 0 \\ \boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}'_1 = 0 \\ \boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}'_2 = 0 \\ \boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}'_3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.41}$$

称矢量组 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ 为对偶基矢量。

证 $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \dfrac{\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3} = \dfrac{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3} = 1$

$$\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \frac{\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3} = \frac{\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3} = \frac{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3} = 1$$

$$\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \frac{\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3} = \frac{\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3} = \frac{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3} = 1$$

$$\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}'_1 = \frac{\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3} = \frac{\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3} = 0$$

同理可证

$$\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}'_1 = 0, \quad \boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}'_3 = 0,$$

$$\boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}'_3 = 0, \quad \boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}'_2 = 0,$$

$$\boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}'_2 = 0$$

例 1.13 证明任一矢量 $\boldsymbol{r}$ 可以用对偶基矢量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 与 $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ 写成下式：

$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}'_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}'_2)\boldsymbol{e}_2 + (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}'_3)\boldsymbol{e}_3$$

证 矢量 $\boldsymbol{r}$ 可以在基矢 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 上分解为

$$\boldsymbol{r} = r_1\boldsymbol{e}_1 + r_2\boldsymbol{e}_2 + r_3\boldsymbol{e}_3$$

两边点乘 $\boldsymbol{e}'_1$，注意到 $\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}'_1 = 0, \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}'_1 = 1$，得

$$r_1 = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}'_1$$

同理

$$r_2 = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}'_2, \quad r_3 = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}'_3$$

从而得

$$\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_1')\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_2')\boldsymbol{e}_2+(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_3')\boldsymbol{e}_3$$

1.7 矢函数的微分法

1. 矢函数及其极限和连续性

(1) 标量自变量的矢函数定义

定义 设有标量变量 t 和变矢量 $\boldsymbol{a}$，如果对于在某一范围内 t 的每个值，$\boldsymbol{a}$ 都有一确定的矢量与之对应，则称 $\boldsymbol{a}$ 为标量(自)变量 t 的矢函数，记作

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t) \tag{1.42}$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 $Oxyz$ 正交坐标系中可写为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1.43}$$

式中，a_x,a_y,a_z 是矢量 $\boldsymbol{a}$ 沿三个坐标轴的分量，或在三个坐标轴上的投影。

以矢量 $\boldsymbol{a}(t)$ 的始点 O 作为坐标原点，当 t 变化时，$\boldsymbol{a}(t)$ 的终点 P 就在空间描绘出一条曲线 l(图1.12)。这样的曲线称为矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 的矢端曲线。式(1.42)或式(1.43)则是此曲线的矢量方程。

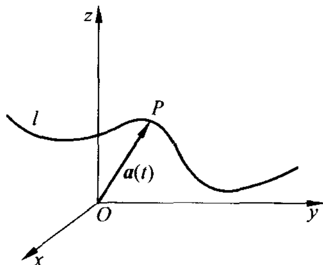


图 1.12

由于把 $\boldsymbol{a}(t)$ 的始点取作坐标原点，所以 $\boldsymbol{a}(t)$ 实际上就成为其终点 P 的矢径。矢径的三个坐标分量 $a_x(t),a_y(t),a_z(t)$ 正好对应地等于它的终点 P 的三个坐标 x,y,z，即

$$x=a_x(t),\quad y=a_y(t),\quad z=a_z(t) \tag{1.44}$$

这就是曲线 l 以 t 为参变量的参数方程。

(2) 矢函数的极限

定义 设矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 在点 t_0 的某个邻域内有定义，$\boldsymbol{a}_0$ 为一常矢，如果对于任意给定的正数 ε，都存在一个正数 δ，使得当 t 满足 $0<|t-t_0|<\delta$ 时，有

$$|\boldsymbol{a}(t)-\boldsymbol{a}_0|<\varepsilon$$

成立，则称当 $t\to t_0$ 时矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 有极限 $\boldsymbol{a}_0$，记作

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}_0 \tag{1.45}$$

这个定义与标量函数的极限定义完全类似。因此，矢函数有类似于标量函数中的一些极限运算法则，如

$$\lim_{t\to t_0}u(t)\boldsymbol{a}(t)=\lim_{t\to t_0}u(t)\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t) \tag{1.46}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{a}(t)\pm\boldsymbol{b}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)\pm\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t) \tag{1.47}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t) \tag{1.48}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)\times\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{b}(t) \tag{1.49}$$

其中，$u(t)$为标量函数，$\boldsymbol{a}(t)$，$\boldsymbol{b}(t)$是矢函数，且当 $t\to t_0$ 时，$u(t)$，$\boldsymbol{a}(t)$，$\boldsymbol{b}(t)$的极限都存在。

设

$$\boldsymbol{a}(t)=a_x(t)\boldsymbol{i}+a_y(t)\boldsymbol{j}+a_z(t)\boldsymbol{k}$$

则有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)=\lim_{t\to t_0}a_x(t)\boldsymbol{i}+\lim_{t\to t_0}a_y(t)\boldsymbol{j}+\lim_{t\to t_0}a_z(t)\boldsymbol{k} \tag{1.50}$$

(3) 矢函数的连续性

定义 若矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$在点 t_0 的某个邻域内有定义，而且有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}_0 \tag{1.51}$$

则称 $\boldsymbol{a}(t)$在 $t=t_0$ 处连续。

若矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$在某区间内的每一点处都连续，则称 $\boldsymbol{a}(t)$在该区间内连续。

2. 矢函数的导数

定义 设矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$在点 t 处的增量 $\Delta\boldsymbol{a}$ 与对应的 Δt 之比

$$\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)}{\Delta t}$$

在 $\Delta t\to 0$ 时，其极限存在，则称此极限为矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$在点 t 处的导数，记作

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)}{\Delta t} \tag{1.52}$$

若 $\boldsymbol{a}(t)$写成分量形式，即

$$\boldsymbol{a}(t)=a_x(t)\boldsymbol{i}+a_y(t)\boldsymbol{j}+a_z(t)\boldsymbol{k}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}a_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{1.53}$$

同样可定义高阶导数。

下面证明：导数$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$是一矢量，其方向沿矢函数$\boldsymbol{a}(t)$矢端曲线的切线。

考察比例式$\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}$。这个比例式是一矢量，其方向沿矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$矢端曲线的割线 PP_1(图 1.13)。当 Δt 趋近于零时，点 P_1 趋近于点 P，割线则趋近于点 P 的切

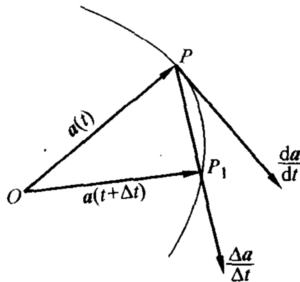


图 1.13

线。因此，矢量$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$的方向，是沿矢函数$\boldsymbol{a}(t)$的矢端曲线上相应点的切线。

3. 矢函数的导数公式

若$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$是标量$t$的可导矢函数，$\phi$是$t$的可导标量函数，则有

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\ (\boldsymbol{c}\text{ 为常矢})\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\pm\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{b}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi\boldsymbol{a})=\phi\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{a}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{c}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]=\boldsymbol{a}\times\left(\boldsymbol{b}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t}\right)+\boldsymbol{a}\times\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{c}\right)+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})
\end{aligned}\right\}\tag{1.54}$$

上述各式中的相乘次序很重要。这些公式的证明方法，与微积分学中标量函数的类似公式的证明方法完全相同。

4. 矢函数的偏导数

若$\boldsymbol{a}$是几个标量的矢函数，譬如是x,y,z的矢函数，则写成$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x,y,z)$。如果下列极限存在，则$\boldsymbol{a}$相对于$x$的偏导数定义为

$$\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\boldsymbol{a}(x+\Delta x,y,z)-\boldsymbol{a}(x,y,z)}{\Delta x}$$

同理，

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial y}&=\lim_{\Delta y\to0}\frac{\boldsymbol{a}(x,y+\Delta y,z)-\boldsymbol{a}(x,y,z)}{\Delta y}\\
\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial z}&=\lim_{\Delta z\to0}\frac{\boldsymbol{a}(x,y,z+\Delta z)-\boldsymbol{a}(x,y,z)}{\Delta z}
\end{aligned}\right\}\tag{1.55}$$

单变量矢函数的连续和可导性的表述，可以推广到两个或多个标量变量的矢函数。例如，如果$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\boldsymbol{a}(x+\Delta x,y+\Delta y)=\boldsymbol{a}(x,y)$，或者如果对于每个正数$\varepsilon$，我们都能找到正数$\delta$，使得$|\Delta x|<\delta$和$|\Delta y|<\delta$时，有$|\boldsymbol{a}(x+\Delta x,y+\Delta y)-\boldsymbol{a}(x,y)|<\varepsilon$，则称$\boldsymbol{a}(x,y)$是连续的。

高阶偏导数可定义为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}\right) \\
\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}\right) \\
\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}\right) \\
\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}\right) \\
\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}\right) \\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \tag{1.56}$$

如果 $\boldsymbol{a}$ 有二阶或更高阶连续可导性，则$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y \partial x}$等与求导的次序无关。

类似地有下列导数公式：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})=\boldsymbol{a} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x} \cdot \boldsymbol{b} \\
&\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})=\boldsymbol{a} \times \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x} \times \boldsymbol{b} \\
&\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})=\boldsymbol{a} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{b}}{\partial y \partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial y}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y \partial x} \cdot \boldsymbol{b}
\end{aligned}\right\} \tag{1.57}$$

5. 矢函数的微分

由图 1.13 可知，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$是一矢量，称 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 是矢函数 $\boldsymbol{a}$ 在点 t 的微分。显然，$\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的方向也是沿矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$的矢端曲线上点 t 的切线。

将微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 写成沿坐标轴的分量形式，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}a_x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}a_y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}a_z\boldsymbol{k}$$

于是有

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\mathrm{d}a_x)^2 + (\mathrm{d}a_y)^2 + (\mathrm{d}a_z)^2} \tag{1.58}$$

对于矢径函数

$$\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

其模

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} \tag{1.59}$$

若在规定了正向的曲线 l 上，取定一点作为计算弧长 s 的起点，并将 l 的正向取作 s 增大的方向，这样，在 l 上任一点处，弧长的微分

$$\mathrm{d}s = \pm \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} \tag{1.60}$$

可见

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=|\mathrm{d}s| \tag{1.61}$$

即，矢径函数的微分的模等于其矢端曲线的弧长微分的绝对值，从而有

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{|\mathrm{d}s|}=1 \tag{1.62}$$

这说明，矢径函数对(其矢端曲线的)弧长 s 的导数$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$为一单位矢量。

例 1.14 设 $\boldsymbol{a}=5t^2\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}-t^3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\sin t\boldsymbol{i}-\cos t\boldsymbol{j}$，求 (1)$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$；(2)$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$；(3)$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})$。

解 (1)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})&=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}\\&=(5t^2\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}-t^3\boldsymbol{k})\cdot(\cos t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j})\\&\quad+(10t\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3t^2\boldsymbol{k})\cdot(\sin t\boldsymbol{i}-\cos t\boldsymbol{j})\\&=5t^2\cos t+t\sin t+10t\sin t-\cos t\\&=(5t^2-1)\cos t+11t\sin t\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{b}\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\5t^2&t&-t^3\\\cos t&\sin t&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\10t&1&-3t^2\\\sin t&-\cos t&0\end{vmatrix}\\&=[t^3\sin t\boldsymbol{i}-t^3\cos t\boldsymbol{j}+(5t^2\sin t-t\cos t)\boldsymbol{k}]\\&\quad+[-3t^2\cos t\boldsymbol{i}-3t^2\sin t\boldsymbol{j}+(-10t\cos t-\sin t)\boldsymbol{k}]\\&=(t^3\sin t-3t^3\cos t)\boldsymbol{i}-(t^3\cos t+3t^2\sin t)\boldsymbol{j}\\&\quad+(5t^2\sin t-\sin t-11t\cos t)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})&=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{a}\\&=2\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\\&=2(5t^2\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}-t^3\boldsymbol{k})\cdot(10t\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3t^2\boldsymbol{k})\\&=100t^3+2t+6t^5\end{aligned}$$

例 1.15 求曲线 $x=t^2+1, y=4t-3, z=2t^2-6t$ 上任一点的单位切矢量。

解 曲线上任一点的切矢量

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(t^2+1)\boldsymbol{i}+(4t-3)\boldsymbol{j}+(2t^2-6t)\boldsymbol{k}]\\&=2t\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+(4t-6)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

切矢量的模

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \sqrt{(2t)^2+(4)^2+(4t-6)^2}$$

单位切矢量

$$\dot{\boldsymbol{T}} = \frac{2t\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+(4t-6)\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2t)^2+(4)^2+(4t-6)^2}}$$

注意到

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

所以

$$\dot{\boldsymbol{T}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$$

例 1.16 若 $\boldsymbol{a}=(2x^2y-x^4)\boldsymbol{i}+(\mathrm{e}^{xy}-y\sin x)\boldsymbol{j}+(x^2\cos y)\boldsymbol{k}$,求 (1)$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}$;(2)$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}$;(3)$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x\partial y}\left(或\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y\partial x}\right)$。

解 (1) $\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(2x^2y-x^4)\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^{xy}-y\sin x)\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial x}(x^2\cos y)\boldsymbol{k}$

$=(4xy-4x^3)\boldsymbol{i}+(y\mathrm{e}^{xy}-y\cos x)\boldsymbol{j}+2x\cos y\boldsymbol{k}$

(2) $\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2x^2y-x^4)\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^{xy}-y\sin x)\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial y}(x^2\cos y)\boldsymbol{k}$

$=2x^2\boldsymbol{i}+(x\mathrm{e}^{xy}-\sin x)\boldsymbol{j}-x^2\sin y\boldsymbol{k}$

(3) $\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(2x^2)\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial x}(x\mathrm{e}^{xy}-\sin x)\boldsymbol{j}-\frac{\partial}{\partial x}(x^2\sin y)\boldsymbol{k}$

$=4x\boldsymbol{i}+(xy\mathrm{e}^{xy}+\mathrm{e}^{xy}-\cos x)\boldsymbol{j}-2x\sin y\boldsymbol{k}$

1.8 矢函数的积分法

1. 矢函数的不定积分

矢函数的积分运算与标量函数的积分运算类似。设

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{b}(t) \tag{1.63}$$

那么

$$\boldsymbol{a} = \int \boldsymbol{b}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{c} \tag{1.64}$$

式中,$\boldsymbol{c}$ 是任意常矢量。

标量函数不定积分的基本性质对于矢函数仍然成立，例如

$$\int u\boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t = u\int \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t \ (u\text{ 为常数}) \tag{1.65}$$

$$\int \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{a}\cdot\int \boldsymbol{b}(t)\mathrm{d}t \ (\boldsymbol{a}\text{ 为常矢}) \tag{1.66}$$

$$\int [\boldsymbol{a}(t)\pm\boldsymbol{b}(t)]\mathrm{d}t = \int \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t \pm \int \boldsymbol{b}(t)\mathrm{d}t \tag{1.67}$$

2. 矢函数的定积分

设矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$在区间$[T_1, T_2]$上连续，则 $\boldsymbol{a}(t)$在$[T_1, T_2]$上的定积分为

$$\int_{T_1}^{T_2} \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{b}(T_2) - \boldsymbol{b}(T_1) \tag{1.68}$$

根据式(1.54)、式(1.63)和式(1.64)，可以得到类似于标量函数积分运算中的一些关系式。例如，可以得到“分部积分”的一些公式：

$$\left.\begin{aligned}
&\int m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = m\boldsymbol{a} - \int \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}t \\
&\int \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}t = m\boldsymbol{a} - \int m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
&\int \boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}\mathrm{d}t \\
&\int \boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} - \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{b}\mathrm{d}t
\end{aligned}\right\} \tag{1.69}$$

式中，m 是标量函数，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是矢函数。

例 1.17 求下列积分：(1)$\int \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t$；(2)$\int_1^2 \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t$，其中 $\boldsymbol{a}(t) = (2+4t)\boldsymbol{i} + 6t^2\boldsymbol{j} + 8t^3\boldsymbol{k}$。

解 (1) $\int \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t = \int [(2+4t)\boldsymbol{i} + 6t^2\boldsymbol{j} + 8t^3\boldsymbol{k}]\mathrm{d}t$

$$= (2t + 2t^2 + c_1)\boldsymbol{i} + (2t^3 + c_2)\boldsymbol{j} + (2t^4 + c_3)\boldsymbol{k}$$

其中 c_1，c_2，c_3 为任意常数。

(2) $\int_1^2 \boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t = [(2t + 2t^2)\boldsymbol{i} + 2t^3\boldsymbol{j} + 2t^4\boldsymbol{k}]_1^2$

$$= 8\boldsymbol{i} + 14\boldsymbol{j} + 30\boldsymbol{k}$$

例 1.18 若质点的位矢为 $\boldsymbol{r}(t)$，则其速度 $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，加速度 $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$。当质点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = (6\cos t)\boldsymbol{i} + (4\sin t)\boldsymbol{j} + \mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{k}$$

时，求 $\boldsymbol{r}(t)$与 $\boldsymbol{v}(t)$，其中 $\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{0}$。

解 $\boldsymbol{v}=\int \boldsymbol{a}\mathrm{d}t=\left(\int 6\cos t\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{i}+\left(\int 4\sin t\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{j}+\left(\int \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{k}$

$$=(6\sin t+c_1)\boldsymbol{i}+(-4\cos t+c_2)\boldsymbol{j}+(-\mathrm{e}^{-t}+c_3)\boldsymbol{k}$$

由于$\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{0}$,因而 $c_1=0,c_2=4,c_3=1$,即

$$\boldsymbol{v}=(6\sin t)\boldsymbol{i}+(-4\cos t+4)\boldsymbol{j}+(-\mathrm{e}^{-t}+1)\boldsymbol{k}$$

于是

$$\boldsymbol{r}(t)=\int \boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t$$

$$=\left(\int 6\sin t\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{i}+\left(\int(-4\cos t+4)\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{j}+\left(\int(-\mathrm{e}^{-t}+1)\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{k}$$

$$=(-6\cos t+c_1)\boldsymbol{i}+(-4\sin t+4t+c_2)\boldsymbol{j}+(\mathrm{e}^{-t}+t+c_3)\boldsymbol{k}$$

由于 $\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{0}$,因而 $c_1=6,c_2=0,c_3=-1$,于是

$$\boldsymbol{r}(t)=(-6\cos t+6)\boldsymbol{i}+(-4\sin t+4t)\boldsymbol{j}+(\mathrm{e}^{-t}+t-1)\boldsymbol{k}$$

1.9 标量场的梯度

1. 标量场及其等值面

如果空间里的每一点,都对应着某个物理量的一个确定的值,则称在此空间里存在着该物理量的场。如果物理量是纯数量,则称这个场是标量场。例如温度场、密度场等都是标量场。如果物理量是矢量,则称这个场是矢量场。例如力场、速度场等都是矢量场。

在标量场中,当选定了坐标系 $Oxyz$ 后,各点处的物理量可表示为

$$\Phi=\Phi(x,y,z)$$

即一个标量场可以用一个单值连续函数表示,我们假定这函数具有一阶连续偏导数。

标量场中具有相同数值物理量的各点所构成的曲面,称为等值面,等值面方程是

$$\Phi(x,y,z)=C \quad (C\text{ 为常数}) \tag{1.70}$$

在二维空间里,$\Phi(x,y)=C$ 表示等值线。

2. 标量场的梯度与方向导数

为了解标量场中标量 Φ 的变化情况,需要研究标量场的梯度与方向导数。

下面考察标量 Φ 在场中各点处的邻域内沿某一方向的变化情况。

若在标量场 $\Phi(P)$ 中的一点 P 处,存在这样的矢量 $\boldsymbol{G}$,其方向为函数 $\Phi(P)$ 在 P 点处变化率最大的方向,其模是这个最大变化率的数值,则称矢量 $\boldsymbol{G}$ 为函数 $\Phi(P)$ 在

点 P 处的梯度，记作 gradΦ，即

$$\text{grad}\Phi = \boldsymbol{G} \tag{1.71}$$

在直角坐标系 $Oxyz$ 里，设点 P 的坐标为 $P(x,y,z)$，对于定义在空间某区域上的标量场 Φ，点 P 处的梯度为

$$\text{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{1.72}$$

为方便起见，引入哈密顿算子

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.73}$$

于是

$$\text{grad}\Phi = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi = \nabla\Phi \tag{1.74}$$

∇ 是一个微分运算符号，同时又应当作矢量看待，这一点在下面讨论矢量场的散度与旋度时更为重要。

标量场中函数 Φ 在某点 P 的梯度 gradΦ 是一个矢量，其方向是函数 Φ 变化最快的方向，其大小是 Φ 沿该方向的变化率，即函数 Φ 的最大变化率。下面讨论沿任意给定方向，函数 Φ 的变化率。

点 P 与单位矢量 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 给定时，过 P 点沿 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 的方向作直线 l（图 1.14）。在 l 上取与 P 点邻近的一点 Q，令 $\overline{PQ}=S$，当 $Q\to P$ 时，比例式

$$\frac{\Delta\Phi}{S} = \frac{\Phi(Q)-\Phi(P)}{\overline{PQ}}$$

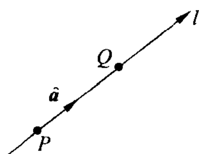


图 1.14

的极限存在，则称上式的极限为函数 $\Phi(P)$ 在点 P 处沿 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 的方向导数，记作

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S} = \lim_{Q\to P}\frac{\Phi(Q)-\Phi(P)}{\overline{PQ}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}\Phi(x(S),y(S),z(S))\right]_{S=0} \\ &= \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}S} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}S} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}S} \\ &= \text{grad}\Phi\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}S} = \boldsymbol{G}\cdot\hat{\boldsymbol{a}}\end{aligned} \tag{1.75}$$

式(1.75)表明，梯度 $\boldsymbol{G}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影正好等于函数 Φ 在该方向上的方向导数。

如果 Φ 的梯度矢量 gradΦ 与单位矢量 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 的夹角为 θ，则 $\text{grad}\Phi\cdot\hat{\boldsymbol{a}} = |\text{grad}\Phi|\cos\theta$，由此可见，$|\text{grad}\Phi|$ 显然是 Φ 变化率的最大值。

例 1.19 对于标量场 $\Phi(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2+2xy$，求 $\Phi(x,y,z)$ 的梯度以及

在点(1,2,1)处、沿 $\hat{\boldsymbol{a}}=\frac{1}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}\boldsymbol{k}$ 方向上 Φ 的方向导数。

解 $$\mathrm{grad}\Phi = \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k} = (2x+2y)\boldsymbol{i} + (2y+2x)\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}$$

在点(1,2,1)处，

$$\nabla\Phi = 6\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$$

于是方向导数

$$\nabla\Phi\cdot\hat{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{3}[(6)\times(1)+(6)\times(2)+(4)\times(2)] = \frac{26}{3}$$

例 1.20 试证(1)$\nabla(F+G)=\nabla F+\nabla G$；(2)$\nabla(FG)=F\nabla G+G\nabla F$，式中 F 和 G 均为 x,y,z 的可导标量函数。

证 (1) $$\begin{aligned}\nabla(F+G) &= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(F+G)\\ &= \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}(F+G)+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}(F+G)+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}(F+G)\\ &= \boldsymbol{i}\frac{\partial F}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial F}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial F}{\partial z}+\boldsymbol{i}\frac{\partial G}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial G}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial G}{\partial z}\\ &= \nabla F+\nabla G\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\nabla(FG) &= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(FG)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(FG)\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}(FG)\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}(FG)\boldsymbol{k}\\ &= \left(F\frac{\partial G}{\partial x}+G\frac{\partial F}{\partial x}\right)\boldsymbol{i}+\left(F\frac{\partial G}{\partial y}+G\frac{\partial F}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}+\left(F\frac{\partial G}{\partial z}+G\frac{\partial F}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}\\ &= F\left(\frac{\partial G}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial G}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial G}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)+G\left(\frac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\\ &= F\nabla G+G\nabla F\end{aligned}$$

1.10 矢量场的散度

设 $\boldsymbol{a}$ 为定义在空间某区域上的矢量场，在直角坐标系中 $\boldsymbol{a}=[a_x(x,y,z),a_y(x,y,z),a_z(x,y,z)]$，在任一点 $P(x,y,z)$处的散度定义为

$$\text{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{1.76}$$

标量场 div$\boldsymbol{a}$ 又可写成$\nabla \cdot \boldsymbol{a}$，于是有

$$\begin{aligned}\text{div}\boldsymbol{a} &= \nabla \cdot \boldsymbol{a} \\ &= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \\ &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\end{aligned} \tag{1.77}$$

对于标量场 Φ，有

$$\begin{aligned}\text{div}(\text{grad}\Phi) &= \nabla \cdot \nabla\Phi \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\end{aligned} \tag{1.78}$$

式(1.78)右端称为标量场 Φ 的拉普拉斯(Laplace)算符，用$\nabla^2\Phi$ 或 $\Delta\Phi$ 表示，算子

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.79}$$

叫做拉普拉斯算子。偏微分方程

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.80}$$

叫做拉普拉斯方程。满足拉普拉斯方程的函数叫做调和函数。

例 1.21 设矢量场 $\boldsymbol{a} = x^2 z\boldsymbol{i} - 2y^3 z^2\boldsymbol{j} + xy^2 z\boldsymbol{k}$，求点 $P(1,-1,1)$处的散度。

解
$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{a} &= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(x^2 z\boldsymbol{i} - 2y^3 z^2\boldsymbol{j} + xy^2 z\boldsymbol{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 z) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^3 z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xy^2 z) \\ &= 2xz - 6y^2 z^2 + xy^2\end{aligned}$$

在点 $P(1,-1,1)$处，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{a}|_P = 2\times(1)\times(1) - 6\times(-1)^2\times(1)^2 + (1)\times(-1)^2 = -3$$

例 1.22 试证$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$。

证
$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}[-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}]$$

$$=3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{2y^2-z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{2z^2-y^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

三式相加得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=0$$

可见所证的是拉普拉斯方程，$\phi=\frac{1}{r}$就是这个方程的解。

例 1.23 对于常矢量 $\boldsymbol{a}$，试证 $\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=0$。

证 设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}=(a_yz-a_zy)\boldsymbol{i}+(a_zx-a_xz)\boldsymbol{j}+(a_xy-a_yx)\boldsymbol{k}$$

从而

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=\frac{\partial}{\partial x}(a_yz-a_zy)+\frac{\partial}{\partial y}(a_zx-a_xz)+\frac{\partial}{\partial z}(a_xy-a_yx)=0$$

1.11 矢量场的旋度

设坐标系 $Oxyz$ 为右手系的正交坐标系，对于矢量场 $\boldsymbol{a}(x,y,z)=a_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+a_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+a_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$，由

$$\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{1.81}$$

所定义的矢量场叫做 $\boldsymbol{a}$ 的旋度，记作 $\mathrm{curl}\boldsymbol{a}$。式(1.81)可写成$\nabla\times\boldsymbol{a}$，即

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix} \tag{1.82}$$

例 1.24　设 $\boldsymbol{a}=xz^3\boldsymbol{i}-2x^2yz\boldsymbol{j}+2yz^4\boldsymbol{k}$，求点 $P(1,-1,1)$ 处的旋度 $\text{curl}\boldsymbol{a}$。

解　
$$\begin{aligned}
\text{curl}\boldsymbol{a} &= \nabla\times\boldsymbol{a}\\
&=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(xz^3\boldsymbol{i}-2x^2yz\boldsymbol{j}+2yz^4\boldsymbol{k})\\
&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4\end{vmatrix}\\
&=\left[\frac{\partial}{\partial y}(2yz^4)-\frac{\partial}{\partial z}(-2x^2yz)\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(xz^3)-\frac{\partial}{\partial x}(2yz^4)\right]\boldsymbol{j}\\
&\quad+\left[\frac{\partial}{\partial x}(-2x^2yz)-\frac{\partial}{\partial y}(xz^3)\right]\boldsymbol{k}\\
&=(2z^4+2x^2y)\boldsymbol{i}+3xz^2\boldsymbol{j}-4xyz\boldsymbol{k}\\
&=3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}\ (\text{在点 } P(1,-1,1)\text{ 处})
\end{aligned}$$

1.12　关于梯度、散度、旋度的公式

设 F,G 为标量场，$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为矢量场，并设它们连续且存在二阶偏导数。

$$\text{grad}(F+G)=\nabla(F+G)=\nabla F+\nabla G \tag{1.83}$$

$$\text{grad}(FG)=\nabla(FG)=G\nabla F+F\nabla G \tag{1.84}$$

$$\text{div}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla\cdot\boldsymbol{b} \tag{1.85}$$

$$\text{curl}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\times\boldsymbol{a}+\nabla\times\boldsymbol{b} \tag{1.86}$$

$$\text{div}(F\boldsymbol{a})=\nabla\cdot(F\boldsymbol{a})=(\nabla F)\cdot\boldsymbol{a}+F(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) \tag{1.87}$$

$$\text{curl}(F\boldsymbol{a})=\nabla\times(F\boldsymbol{a})=(\nabla F)\times\boldsymbol{a}+F(\nabla\times\boldsymbol{a}) \tag{1.88}$$

$$\text{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b}) \tag{1.89}$$

$$\begin{aligned}\text{curl}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\&=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+(\nabla\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\nabla\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}\end{aligned} \tag{1.90}$$

$$\begin{aligned}\text{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})&=\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\\&=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})\end{aligned} \tag{1.91}$$

$$\text{div grad } F=\nabla\cdot(\nabla F)=\nabla^2F \tag{1.92}$$

$$\text{curl grad } F=\nabla\times\nabla F=\boldsymbol{0} \tag{1.93}$$

$$\text{div curl } \boldsymbol{a}=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0 \tag{1.94}$$

$$\text{curl curl } \boldsymbol{a}=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla^2\boldsymbol{a} \tag{1.95}$$

这些公式的证明将部分地作为本章的练习题，由读者自证之。为了帮助读者推证，下面用哈密顿算子证明其中三个较复杂的公式。

由于哈密顿算子兼有微分性质和矢量性质，因此，在运算中除了要遵循微分法则外，还要遵循矢量运算法则，例如式(1.33)和式(1.37)。

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\nabla_a\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})-\nabla_b\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$$

这里，∇下的字母表示∇仅对该字母表示的矢量作用。如果∇后只有一个矢量，就没有必要再加下标。因此

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})$$

$$\begin{aligned}\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=\nabla_a\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})-\nabla_b\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\\&=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})&=\nabla_a(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\nabla_b(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\\&=\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

1.13 梯度、散度、旋度定义的不变性

梯度、散度、旋度定义的不变性，是指标量场 $\Phi(x_1,x_2,x_3)$ 的梯度 grad$\Phi(\nabla\Phi)$，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度 div$\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$ 的定义与正交坐标系的取法无关，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度 curl$\boldsymbol{A}(\nabla\times\boldsymbol{A})$ 的定义与右手系的正交坐标系的取法无关。

考察共原点 O 的两正交坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 和 $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ 图(1.15)。坐标轴的单位矢量分别为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 和 $\bar{\boldsymbol{e}}_1,\bar{\boldsymbol{e}}_2,\bar{\boldsymbol{e}}_3$。点 P 在两坐标系中的坐标分别为 (x_1,x_2,x_3) 和 $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$。坐标变换的关系式为

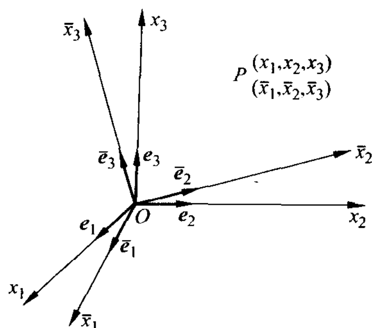


图 1.15

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}_1&=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3\\\bar{x}_2&=\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\alpha_{23}x_3\\\bar{x}_3&=\alpha_{31}x_1+\alpha_{32}x_2+\alpha_{33}x_3\end{aligned}\right\}\tag{1.96}$$

式中 α_{ij} 中的下标 $i,j=1,2,3$ 分别表示 $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3$ 轴与 x_1,x_2,x_3 轴之间的方向余弦。如果两坐标系不共原点，且老坐标系 $x_1x_2x_3$ 的原点 O 在新坐标系 $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ 中的坐标为 $(\bar{c}_1,\bar{c}_2,\bar{c}_3)$ 时，坐标变换式为

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}_1&=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3+\bar{c}_1\\\bar{x}_2&=\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\alpha_{23}x_3+\bar{c}_2\\\bar{x}_3&=\alpha_{31}x_1+\alpha_{32}x_2+\alpha_{33}x_3+\bar{c}_3\end{aligned}\right\}\tag{1.97}$$

式(1.96)表示纯旋转变换，称为正交变换。式(1.97)表示平移加旋转变换，称为仿射变换。

如果标量场在两坐标系中分别表示为 $\Phi(x_1,x_2,x_3)$ 和 $\bar{\Phi}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$，且

$$\Phi(x_1,x_2,x_3)=\bar{\Phi}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$$

则称 $\Phi(x_1,x_2,x_3)$是不变的。同样地,如果矢量场

$$\boldsymbol{a}(x_1,x_2,x_3)=\bar{\boldsymbol{a}}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$$

或

$$\begin{aligned}&a_1(x_1,x_2,x_3)\boldsymbol{e}_1+a_2(x_1,x_2,x_3)\boldsymbol{e}_2+a_3(x_1,x_2,x_3)\boldsymbol{e}_3\\&=\bar{a}_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)\bar{\boldsymbol{e}}_1+\bar{a}_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)\bar{\boldsymbol{e}}_2+\bar{a}_3(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)\bar{\boldsymbol{e}}_3\end{aligned}$$

则称矢量场 $\boldsymbol{a}(x_1,x_2,x_3)$是不变的。这种不变性的意义可以用于梯度、散度、旋度等概念。

由例 1.6 和式(1.96),有

$$\left.\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{e}}_1&=(\bar{\boldsymbol{e}}_1\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1+(\bar{\boldsymbol{e}}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2+(\bar{\boldsymbol{e}}_1\cdot\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3\\&=\alpha_{11}\boldsymbol{e}_1+\alpha_{12}\boldsymbol{e}_2+\alpha_{13}\boldsymbol{e}_3\\\bar{\boldsymbol{e}}_2&=(\bar{\boldsymbol{e}}_2\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1+(\bar{\boldsymbol{e}}_2\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2+(\bar{\boldsymbol{e}}_2\cdot\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3\\&=\alpha_{21}\boldsymbol{e}_1+\alpha_{22}\boldsymbol{e}_2+\alpha_{23}\boldsymbol{e}_3\\\bar{\boldsymbol{e}}_3&=(\bar{\boldsymbol{e}}_3\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1+(\bar{\boldsymbol{e}}_3\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2+(\bar{\boldsymbol{e}}_3\cdot\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3\\&=\alpha_{31}\boldsymbol{e}_1+\alpha_{32}\boldsymbol{e}_2+\alpha_{33}\boldsymbol{e}_3\end{aligned}\right\}\tag{1.98}$$

同理可证得

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1&=(\boldsymbol{e}_1\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_1)\bar{\boldsymbol{e}}_1+(\boldsymbol{e}_1\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_2)\bar{\boldsymbol{e}}_2+(\boldsymbol{e}_1\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_3)\bar{\boldsymbol{e}}_3\\&=\alpha_{11}\bar{\boldsymbol{e}}_1+\alpha_{21}\bar{\boldsymbol{e}}_2+\alpha_{31}\bar{\boldsymbol{e}}_3\\\boldsymbol{e}_2&=(\boldsymbol{e}_2\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_1)\bar{\boldsymbol{e}}_1+(\boldsymbol{e}_2\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_2)\bar{\boldsymbol{e}}_2+(\boldsymbol{e}_2\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_3)\bar{\boldsymbol{e}}_3\\&=\alpha_{12}\bar{\boldsymbol{e}}_1+\alpha_{22}\bar{\boldsymbol{e}}_2+\alpha_{32}\bar{\boldsymbol{e}}_3\\\boldsymbol{e}_3&=(\boldsymbol{e}_3\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_1)\bar{\boldsymbol{e}}_1+(\boldsymbol{e}_3\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_2)\bar{\boldsymbol{e}}_2+(\boldsymbol{e}_3\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_3)\bar{\boldsymbol{e}}_3\\&=\alpha_{13}\bar{\boldsymbol{e}}_1+\alpha_{23}\bar{\boldsymbol{e}}_2+\alpha_{33}\bar{\boldsymbol{e}}_3\end{aligned}\right\}\tag{1.99}$$

下面先证明标量场梯度定义的不变性。引入符号 $\Phi_{,i}$表示$\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_i}$,$\Phi_{,j}$表示$\dfrac{\partial\Phi}{\partial \bar{x}_j}$,于是标量场的梯度可写为

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\Phi&=\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1+\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_2+\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_3\\&=\Phi_{,1}\boldsymbol{e}_1+\Phi_{,2}\boldsymbol{e}_2+\Phi_{,3}\boldsymbol{e}_3\\&=\sum_i\Phi_{,i}\boldsymbol{e}_i,\quad i=1,2,3\end{aligned}\tag{1.100}$$

$$\begin{aligned}\sum_j\Phi_{,j}\bar{\boldsymbol{e}}_j&=\sum_j\sum_i\Phi_{,i}x_{i,j}\bar{\boldsymbol{e}}_j\qquad(\text{链式法则})\\&=\sum_j\sum_i\Phi_{,i}\alpha_{i,j}\bar{\boldsymbol{e}}_j\end{aligned}$$

$$= \sum_i \Phi_{,i} \sum_j (\boldsymbol{e}_i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_j) \bar{\boldsymbol{e}}_j \qquad \text{(由于式(1.99))}$$

$$= \sum_i \Phi_{,i} \boldsymbol{e}_i \qquad \text{(由于式(1.98))}$$

式中，$x_{i,\bar{j}} = \dfrac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} = \alpha_{i,j} = \boldsymbol{e}_i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_j$。

可见，梯度的定义具有不变性。

再证明散度定义的不变性。

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \sum_i a_{i,i}$$

$$\sum_j \bar{a}_{j,\bar{j}} = \sum_j \sum_i \bar{a}_{j,i} x_{i,\bar{j}} \qquad \text{(链式法则)}$$

$$= \sum_j \sum_i \bar{a}_{j,i} \alpha_{i,j}$$

$$= \sum_i \Big(\sum_j \alpha_{i,j} \bar{a}_j \Big)_{,i} = \sum_i a_{i,i} \qquad \text{(由于式(1.99))}$$

这就证明了散度定义的不变性。

最后证明对于任何右手系的正交坐标系，旋度定义具有不变性。

$$\begin{vmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_1 & \bar{\boldsymbol{e}}_2 & \bar{\boldsymbol{e}}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}_1} & \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}_2} & \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum \alpha_{i1} \boldsymbol{e}_i & \sum \alpha_{j2} \boldsymbol{e}_j & \sum \alpha_{k3} \boldsymbol{e}_k \\ \sum \alpha_{i1} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \sum \alpha_{j2} \dfrac{\partial}{\partial x_j} & \sum \alpha_{k3} \dfrac{\partial}{\partial x_k} \\ \sum \alpha_{i1} a_i & \sum \alpha_{j2} a_j & \sum \alpha_{k3} a_k \end{vmatrix}$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k \alpha_{i1} \alpha_{j2} \alpha_{k3} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_i & \boldsymbol{e}_j & \boldsymbol{e}_k \\ \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_j} & \dfrac{\partial}{\partial x_k} \\ a_i & a_j & a_k \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

1.14 线积分与面积分

1. 线积分

连接 A,B 两点的曲线为 L，定义在 L 上的标量场 Φ 已给定，设沿 L 量得的弧长为 s，A,B 两点对应于 $s=a,b(a<b)$（图 1.16）。称定积分 $\int_a^b \Phi[P(s)]\mathrm{d}s$ 为标量场 Φ 沿曲线 L 的线积分，用 $\int_L \Phi(x,y,z)\mathrm{d}s$ 表示。当曲线 L 为闭曲线时，用 $\oint_L \Phi(x,y,z)\mathrm{d}s$ 表示。

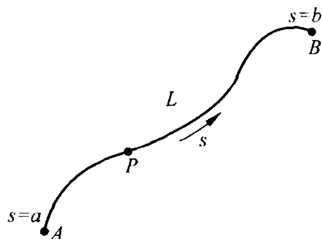


图 1.16

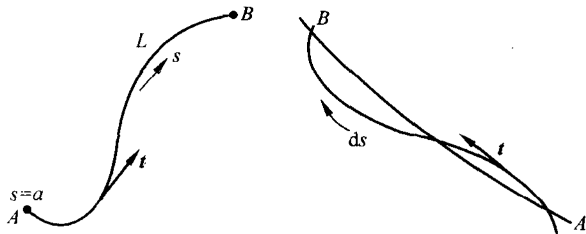


图 1.17

有向曲线 L 的切线单位矢量记为 $\boldsymbol{t}$。设矢量场 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，称 $\int_L \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s$ 为 $\boldsymbol{a}$ 沿有向曲线 L 的线积分（图 1.17），也可记为 $\int_L a_t\mathrm{d}s$ 或 $\int_L \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。

$$\int_L \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s=\int_a^b\left(a_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+a_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+a_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s \tag{1.101}$$

例 1.25 求 $\int_L (x^2y\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y)$，其中 L 为由点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 抛物线 $y=x^2$ 上的一部分。

解 在 L 上，若取 x 为参数，由于 $y=x^2$，$\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x$，于是

$$\int_L (x^2y\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y)=\int_{-1}^1 (x^2(x^2)+(x^2-x)2x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-1}^1 (x^4+2x^3-2x^2)\mathrm{d}x=-\frac{14}{15}$$

例 1.26 设矢量场 $\boldsymbol{a}=(y^2+z^2)\boldsymbol{i}+(z^2+x^2)\boldsymbol{j}+(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}$ 沿曲线 $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k}$ 从原点到点 $(1,1,1)$ 这段曲线的线积分。

解 由曲线方程，有 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2t$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=3t^2$，于是

$$\int_L \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^1\left(a_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+a_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1[(y^2+z^2)+(z^2+x^2)2t+(x^2+y^2)3t^2]\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1[t^4+t^6+(t^6+t^2)2t+(t^2+t^4)3t^2]\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1(2t^3+4t^4+4t^6+2t^7)\mathrm{d}t=297/140$$

2. 面积分

当点 P 的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 是两变量 u,v 的函数时，如果(u,v)在 uv 平面的区域内变动时，点 P 一般地就描出曲面 S。

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=[x(u,v),y(u,v),z(u,v)] \tag{1.102}$$

是曲面 S 的参数表示式，(u,v)是点 P 的曲面坐标。

点 P 是 u,v 曲线的交点(图 1.18(a))，$\boldsymbol{r}_u=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$，$\boldsymbol{r}_v=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$分别是过点 P 处 u,v 曲线的切线矢量。

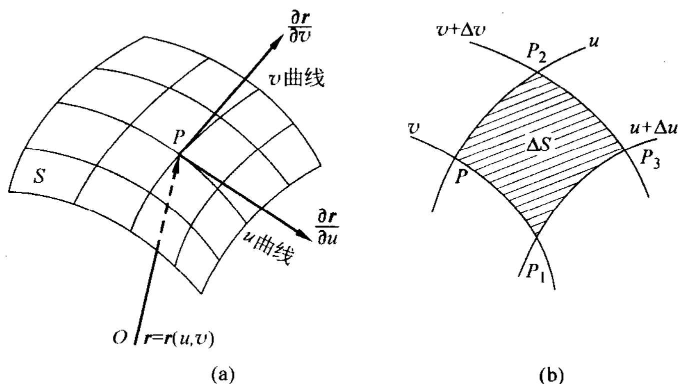


图 1.18

假定曲面 S 上 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v$ 在曲面上任意点处是线性无关的。过 P 点由 $\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v$ 决定的平面叫做曲面在 P 点的切平面，与切平面垂直的矢量 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 叫做法向矢量，法向单位矢量是

$$\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|} \tag{1.103}$$

因为两矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的矢积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的大小$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$等于以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两邻边的平行四边形的面积，所以

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$$

图 1.18(b)所示的微小面积 $\Delta S=|\overrightarrow{PP}_1\times\overrightarrow{PP}_2|$，而

$$\overrightarrow{PP}_1=\boldsymbol{r}(u+\Delta u,v)-\boldsymbol{r}(u,v)=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\Delta u$$

$$\overrightarrow{PP}_2=\boldsymbol{r}(u,v+\Delta v)-\boldsymbol{r}(u,v)=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\Delta v$$

所以

$$\begin{aligned}\Delta S&=|\overrightarrow{PP}_1\times\overrightarrow{PP}_2|=\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|\Delta u\Delta v\\&=\sqrt{(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u)(\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v)-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)^2}\Delta u\Delta v\\&=\sqrt{r_u^2+r_v^2-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)^2}\Delta u\Delta v\end{aligned}$$

面积元素

$$\mathrm{d}S=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\sqrt{r_u^2r_v^2-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{1.104}$$

面积

$$S=\iint_D|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_D\sqrt{r_u^2r_v^2-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{1.105}$$

式中，D 是对应于 S 的 uv 平面上的区域。

为了区分曲面的两侧，常常取定其中的一侧作为曲面的正侧，并规定曲面的法线单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 指向正侧；如果曲面是封闭的，则按习惯总是取其外侧为正侧。这种取定了正侧的曲面，称为*有向曲面*。

设给出已定向的曲面 S 与定义在 S 上的矢量场 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{n}$ 为给出 S 的方向的法线单位矢量的矢量场。$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的内积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}$ 是定义在 S 上的标量场。这个标量场在 S 上的面积分

$$\iint_S\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

称为矢量场 $\boldsymbol{a}$ 在已定向的曲面上的*面积分*。因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=a_n$，所以

$$\iint_S\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint_S a_n\mathrm{d}S \tag{1.106}$$

曲面 S 用 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 给定时，以曲线坐标 (u,v) 表示的法线单位矢量 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v/|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|$ 与给出 S 的方向的法线单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 一致，则

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$$

由于

$$\mathrm{d}S=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

所以

$$\iint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint_D \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\iint_D\left\{a_x\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}+a_y\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\iint_D\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{1.107}$$

例 1.27 已知曲面方程 $z=f(x,y)$，应用式(1.105)导出曲面面积公式。

解 设 $u=x,v=y$，则

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}[x,y,f(x,y)]$$

$$\boldsymbol{r}_x=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x}=(1,0,f_x),\quad \boldsymbol{r}_y=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y}=(1,0,f_y)$$

$$\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u=1+f_x^2,\quad \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v=1+f_y^2,\quad \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=f_xf_y$$

所以

$$S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例 1.28 求质量为 M、密度均匀的球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 对于 z 轴的转动惯量 I。

解 因为球面的全表面面积是 $4\pi a^2$，密度 ρ 等于 $M/4\pi a^2$。设球面的参数表示为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(a\sin u\cos v,\ a\sin u\sin v,\ a\cos u),\quad 0\leqslant u\leqslant\pi,\quad 0\leqslant v\leqslant 2\pi$$

再设从球面上的点(x,y,z)到 z 轴的距离为 d，则

$$d^2=x^2+y^2=a^2\sin^2u$$

$$\boldsymbol{r}_u=(a\cos u\cos v,\ a\cos u\sin v,\ -a\sin u)$$

$$\boldsymbol{r}_v=(-a\sin u\sin v,\ a\sin u\cos v,\ 0)$$

所以

$$\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u=a^2,\quad \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v=a^2\sin^2u,\quad \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=0$$

$$\sqrt{(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v)-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)^2}=a^2\sin u$$

从而

$$I=\iint_S d^2\rho\mathrm{d}S=\frac{M}{4\pi a^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}v\int_0^{\pi}a^4\sin^3u\mathrm{d}u$$

$$= \frac{Ma^2}{4\pi} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}Ma^2$$

例 1.29 求$\iint_S (zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$，其中 S 是球体 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的 $z \geqslant 0$ 的部分。设 $\boldsymbol{n}$ 的方向为由球体的内部指向外部的方向。

解 取(x,y)为上半球面的曲线坐标时，则对于该曲线坐标的法线单位矢量与给出 S 方向的 $\boldsymbol{n}$ 一致(图 1.19)。

因为

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

所以

$$z_x = -x/z, \quad z_y = -y/z$$

又

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial x}{\partial y} & \dfrac{\partial y}{\partial y} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} zx & yz & x^2 \\ 1 & 0 & -x/z \\ 0 & 1 & -y/z \end{vmatrix} = 2x^2 + y^2$$

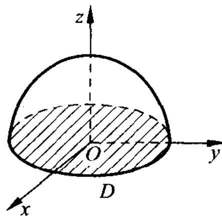


图 1.19

于是

$$\begin{aligned} \iint_S (zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y) &= \iint_D (2x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2(1+\cos^2\theta)r\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{2\pi}(1+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{d}r \\ &= \frac{3}{4}\pi a^4 \end{aligned}$$

1.15 积分定理

1. 平面上的格林(Green)定理

如果在区域 D 与其边界∂D 上[①]，$P(x,y)$，$Q(x,y)$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial y}$连续，则有

$$\int_{\partial D}(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.108}$$

① 区域 D 的边界曲线是有方向的，如果沿 D 的边界前进，区域 D 在左侧，则此方向为曲线的正向，或者说，边界曲线∂D 的正向与区域 D 的外法线矢量(即 k)构成右手系。

证 先考虑

$$a \leqslant x \leqslant b, y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x); \quad c \leqslant y \leqslant d, x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)$$

所表示的区域 D(图 1.20)。因为二重积分的计算公式是

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1}^{y} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\mathrm{d}x$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x \\ &= \int_c^d [Q(x_2,y) - Q(x_1,y)]\mathrm{d}y \\ &= \int_c^d Q(x_2,y)\mathrm{d}y + \int_d^c Q(x_1,y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\partial D} Q(x,y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(y)}^{y_2(y)} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y \\ &= -\int_a^b [P(x,y_2) - P(x,y_1)]\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b P(x,y_1)\mathrm{d}x + \int_b^a P(x,y_2)\mathrm{d}x \\ &= \iint_{\partial D} P(x,y)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

两式相加即得格林定理的方程。

若 D 为一般区域,将 D 分成使格林定理成立的几部分区域(图 1.21)。由于各部分区域上格林定理成立,将各分区域上的方程相加,由于 D 的边界以外的各条划分区域的边界上的积分互相抵消,所以格林定理对于一般区域成立。

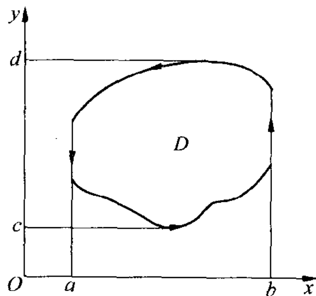


图 1.20

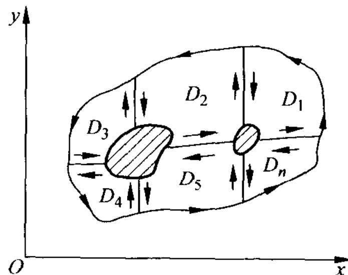


图 1.21

2. 斯托克斯(Stokes)定理

设 S 是以几条闭曲线为边界的有向曲面,矢量场 $\boldsymbol{a}$ 具有连续的偏导函数,于是

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{t} \mathrm{d}S = \iint_S (\mathrm{curl}\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{1.109}$$

成立。设 $\boldsymbol{a}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$,则下式成立:

$$\int_{\partial S}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z)$$
$$=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] \tag{1.110}$$

证　设具有边界 ∂S 的任意曲面是非封闭的,平行于 z 轴的直线(虚线)与 S 只交于一点(图 1.22)。∂S 在 xy 平面上的投影给出区域 D_{xy},其边界为 ∂D_{xy}。取曲面 S 的法线单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴成锐角,即 $\cos(\boldsymbol{n},z)>0$。

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{d}D_{xy}=\cos(\boldsymbol{n},z)\mathrm{d}S$$

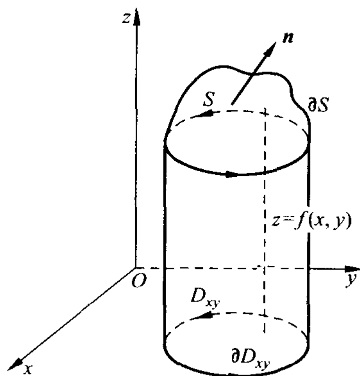


图　1.22

先考察积分 $\int_{\partial S}P(x,y,z)\mathrm{d}x$,曲线 ∂S 在 S 上,利用这个曲面的方程:$z=f(x,y)$,积分号后面可以用 $f(x,y)$ 代替 z,这样被积函数 $P(x,y,f(x,y))$ 就只含有 x 与 y。∂D_{xy} 上各点的坐标 (x,y) 与 ∂S 上各点的坐标对应,所以沿 ∂S 的积分可以用沿 ∂D_{xy} 的积分替换,即

$$\int_{\partial S}P(x,y,z)\mathrm{d}x=\int_{\partial D_{xy}}P(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x$$

对于右边的积分可以应用格林定理(式 1.108)。这时,$P=P(x,y,f(x,y))$,$Q=0$,式(1.108)中的 ∂S 则用 ∂D_{xy} 代替。计算 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 时,需要求 P 直接对 y 的导数,以及通过第三变量 z 求对 y 的导数,而 z 我们已经用 $f(x,y)$ 替换了,即

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

由式(1.108),有

$$\int_{\partial S}P\mathrm{d}x=\int_{\partial D_{xy}}P(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x$$
$$=-\iint_{D_{xy}}\left[\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P(x,y,f(x,y))}{\partial z}\cdot\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由解析几何知,曲面 S 在点 (x,y,z) 的法线的方向余弦与 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$、$\dfrac{\partial f}{\partial y}$、$(-1)$ 成比例,即

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},z) = -\cos(\boldsymbol{n},x),\quad \frac{\partial f}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n},z) = -\cos(\boldsymbol{n},y)$$

所以

$$\int_{\partial S} P\mathrm{d}x = \iint_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}z - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) \tag{a}$$

按坐标 x,y,z 的循环排列计算积分 $\int_{\partial S} Q\mathrm{d}y$ 和 $\int_{\partial S} R\mathrm{d}z$，得

$$\int_{\partial S} Q\mathrm{d}y = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x - \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right) \tag{b}$$

$$\int_{\partial S} R\mathrm{d}z = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\right) \tag{c}$$

(a),(b),(c)三式相加，即得所证的式(1.109)，即

$$\int_{\partial S}(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z)$$
$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

亦即

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{t}\mathrm{d}S = \iint_S (\mathrm{curl}\boldsymbol{a})\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

当曲面 S 为一般情况时，同平面上的格林定理的证明一样，将 S 分割后，每个局部写出斯托克斯公式，然后相加即得总的斯托克斯公式。

如果斯托克斯定理应用于 $\boldsymbol{A}=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$，$S$ 是以几条闭曲线为边界的曲面，D 为 xy 平面上的区域，对于 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}$ 的情况，有

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

于是

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{t}\mathrm{d}S = \iint_S (\mathrm{curl}\boldsymbol{a})\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

就成为

$$\int_{\partial D}(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以格林定理是斯托克斯定理中的特殊情况。

3. 高斯(Gauss)散度定理

如果在空间的区域 V 及其边界的闭曲面 S 上，矢量场 $\boldsymbol{a}$ 具有连续的一阶偏导函

数，则

$$\iint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{a}\mathrm{d}V \tag{1.111}$$

成立。设 $\boldsymbol{a}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$，则式(1.111)写成

$$\iint_S(P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1.112}$$

式(1.112)中，我们规定曲面 S 的指向为区域 V 的外侧法线单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 的方向。

证 先证明

$$\iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

设 V 表示为 $z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)$，$(x,y)\in D$ 的情况，D 是 xy 平面上的区域，如图1.23所示。S_1，S_2 的方程分别是 $z=z_1(x,y)$，$z=z_2(x,y)$，于是

$$\begin{aligned}\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iint_D\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D[R(x,y,z_2(x,y))\\&\quad-R(x,y,z_1(x,y))]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

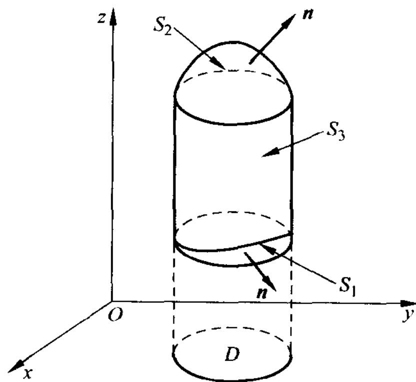


图 1.23

在曲面 S_2 上，虽然在曲线坐标(x,y)处的法线单位矢量

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y}\Big/\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y}\right|$$

与 $\boldsymbol{n}$ 一致，但在曲面 S_1 上，对应的曲线坐标(x,y)的法线单位矢量却等于$-\boldsymbol{n}$，从而

$$\begin{aligned}&\iint_D R(x,y,z_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{S_2}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D R(x,y,z_1(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{S_1}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

又

$$\iint_{S_3}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

相加后得

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{S_1} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{S_2} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{S_3} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{a}$$

区域 V 为一般情况时，同平面上的格林定理的证明一样，将 V 分割为几部分来证明，再相加即得整区域的证明。

同样可以证明

$$\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{b}$$

$$\iint\limits_S Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{c}$$

(a)，(b)，(c)三式相加，即得式(1.111)。

习　题

1.1　试证矢量加法符合结合律，即 $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$。

1.2　已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是共面但不共线的两个矢量，在 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所决定的平面内，写出任一矢量 $\boldsymbol{r}$ 的表达式。

1.3　设 P_1,P_2,P_3 是相对于原点 O 的三个固定点，它们的位矢分别为 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$。试证明：当且仅当 $a_1+a_2+a_3=0$，矢量方程 $a_1\boldsymbol{r}_1+a_2\boldsymbol{r}_2+a_3\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0}$ 对原点 O 成立时，这类矢量方程对于任何其他的原点 O' 也成立。

1.4　已知 P,Q 两点的位矢分别为 $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_2=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，试用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 表示$\overrightarrow{PQ}$，并求其大小。

1.5　不共线的 A,B,C 三点相对于原点 O 的位矢分别为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，试证通过这三点的平面方程是

$$\boldsymbol{r}=\frac{m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c}}{m+n+p}$$

式中，m,n,p 是标量。并证明方程与原点选择无关。

1.6　设 $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_3=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_4=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，若 $\boldsymbol{r}_4=a\boldsymbol{r}_1+b\boldsymbol{r}_2+c\boldsymbol{r}_3$，求 a,b,c。

1.7　作图描述下列矢量场：(1) $\boldsymbol{V}(x,y)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$；(2) $\boldsymbol{V}(x,y)=-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}$；(3) $\boldsymbol{V}(x,y,z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$。

1.8　作图描述下列矢量场：(1) $\boldsymbol{V}(x,y)=x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}$；(2) $\boldsymbol{V}(x,y)=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}$；

(3) $\boldsymbol{V}(x,y,z)=\dfrac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{(x)^2+(y)^2+(z)^2}}$。

1.9 试证 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$。

1.10 试证$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}$。

1.11 设 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，试求垂直于 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的单位矢量。

1.12 试求与矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ 垂直，并通过矢量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 末端的平面方程。

1.13 设已知点(x_1,y_1,z_1)的位矢为 $\boldsymbol{a}$，任意点(x,y,z)的位矢为 $\boldsymbol{r}$，描述下列情况下 $\boldsymbol{r}$ 的轨迹：(1) $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|=3$；(2) $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=0$；(3) $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{r}=0$。

1.14 求题1.12中坐标原点到所作平面的距离。

1.15 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，试求：(1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$；(2) $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；(3) $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$。

1.16 设 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2,\boldsymbol{V}_3,\boldsymbol{V}_4$ 四矢量的模分别等于四面体四个表面 F_1,F_2,F_3,F_4 的面积，矢量的方向是这些表面向外的法线方向，试证 $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3+\boldsymbol{V}_4=\boldsymbol{0}$。

1.17 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，试求：(1) $|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}|$；(2) $|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$；(3) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$；(4) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$；(5) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$；(6) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$。

1.18 试证 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行六面体体积的绝对值。

1.19 试证 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$。

1.20 试证矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充分与必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=0$。

1.21 化简$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$。

1.22 试证 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 的充分与必要条件是$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，并讨论 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 或 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$ 的情况。

1.23 试证球面三角形的正弦定理。

1.24 试证$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2$。

1.25 求矢量组 $2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的对偶矢量组。

1.26 已知 $\boldsymbol{e}'_1=\dfrac{\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}$，$\boldsymbol{e}'_2=\dfrac{\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}$，$\boldsymbol{e}'_3=\dfrac{\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}$，若 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3\neq0$，试证：(1)若 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=V$，则 $\boldsymbol{e}'_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}'_3=1/V$；(2)若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 不共面，则 $\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3$ 也不共面。

1.27 若 $\boldsymbol{e}'_1=\dfrac{\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}$，$\boldsymbol{e}'_2=\dfrac{\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}$，$\boldsymbol{e}'_3=\dfrac{\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}$，试证：$\boldsymbol{e}_1=\dfrac{\boldsymbol{e}'_2\times\boldsymbol{e}'_3}{\boldsymbol{e}'_1\cdot\boldsymbol{e}'_2\times\boldsymbol{e}'_3}$，$\boldsymbol{e}_2=\dfrac{\boldsymbol{e}'_3\times\boldsymbol{e}'_1}{\boldsymbol{e}'_1\cdot\boldsymbol{e}'_2\times\boldsymbol{e}'_3}$，$\boldsymbol{e}_3=\dfrac{\boldsymbol{e}'_1\times\boldsymbol{e}'_2}{\boldsymbol{e}'_1\cdot\boldsymbol{e}'_2\times\boldsymbol{e}'_3}$。

1.28 已知 $\boldsymbol{a}=\sin t\boldsymbol{i}+\cos t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$，试求：(1) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$；(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}$；(3) $\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right|$；(4) $\left|\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right|$。

1.29 曲线 C 的参数方程为 $x=x(s)$，$y=y(s)$，$z=z(s)$，式中 s 是从曲线 C 上一定点沿着 C 量得的弧长。设 $\boldsymbol{r}$ 是曲线 C 上任一点 P 的位矢。试证明 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s$ 是曲线 C 在该点的切线单位矢量。

1.30 试求曲线 $x=a\cos\omega t$，$y=a\sin\omega t$，$z=bt$（a，b，ω 是常数）上任一点的切线单位矢量。

1.31 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是标量 u 的可导函数。试证：(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}$；(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{b}$。

1.32 试求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)$。

1.33 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是 s 的可导函数，试求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}s}-\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{b}\right)$。

1.34 设 $\boldsymbol{a}$ 的模为常量，且 $\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right|\neq 0$，试证明 $\boldsymbol{a}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$ 互相垂直。

1.35 设 $\boldsymbol{a}(t)=3t^2\boldsymbol{i}-(t+4)\boldsymbol{j}-(t^2-2t)\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}(t)=\sin t\boldsymbol{i}+3\mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{j}-3\cos t\boldsymbol{k}$，试求 $t=0$ 时的 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$。

1.36 试证 $\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=a\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$。

1.37 设 $\boldsymbol{F}$ 是 x，y，z，t 的函数，而 x，y，z 又是 t 的函数，并且都是可导函数，试证

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

1.38 设 $\boldsymbol{a}=\cos xy\boldsymbol{i}+(3xy-2x^2)\boldsymbol{j}-(3x-2y)\boldsymbol{k}$，试求：$\dfrac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x}$，$\dfrac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial y\partial x}$。

1.39 设 $\boldsymbol{a}=x^2yz\boldsymbol{i}-2xz^3\boldsymbol{j}+xz^2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2z\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-x^2\boldsymbol{k}$，试求点 $(1,0,-2)$ 的 $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$。

1.40 验证 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{P}_0\exp[\mathrm{i}\omega(t-r/c)]}{r}$ 满足偏微分方程 $\dfrac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial r}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{a}}{\partial t^2}$。式中 $\boldsymbol{P}_0$ 是常矢量，ω，c 是常量，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$。

1.41 设 $\boldsymbol{R}(u)=(u-u^2)\boldsymbol{i}+2u^3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，试求：(1) $\int\boldsymbol{R}(u)\mathrm{d}u$；(2) $\int_1^2\boldsymbol{R}(u)\mathrm{d}u$。

1.42 试求 $\int\boldsymbol{a}\times\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}t$。

1.43 证明行星的轨道是椭圆,太阳是椭圆的一个焦点。

1.44 设 $\Phi(x,y,z)=3x^2y-y^3z^2$,试求在点 $P(1,-2,1)$ 的 $\nabla\Phi$(即 $\mathrm{grad}\Phi$)。

1.45 设 $\boldsymbol{a}=2x^2\boldsymbol{i}-3yz\boldsymbol{j}+xz^2\boldsymbol{k}$, $\Phi=2x-x^3y$,试求在点 $P(1,-1,1)$ 的 $\boldsymbol{a}\cdot\nabla\Phi$ 与 $\boldsymbol{a}\times\nabla\Phi$。

1.46 设(1) $\Phi=\ln|\boldsymbol{r}|$;(2) $\Phi=\dfrac{1}{r}$,试求 $\nabla\Phi$。

1.47 试证 $\nabla r^n=nr^{n-2}\boldsymbol{r}$。

1.48 试求 $\nabla(3r^2-4\sqrt{r}+6/\sqrt[3]{r})$。

1.49 试证 $\nabla\Phi$ 垂直于曲面 $\Phi(x,y,z)=c$,式中 c 为常数。

1.50 试求曲面 $2xz^2-3xy-4x=7$ 在点 $(1,-1,2)$ 的切平面方程。

1.51 试求曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(2,-1,5)$ 的切平面方程与法线方程。

1.52 试证 Φ 的最大变化率(即最大方向导数)的模与方向就是 $\nabla\Phi$ 的模与方向。

1.53 设 $\Phi=axy^2+byz+cz^2x^3$ 在点 $(1,2,-1)$ 的梯度 $\nabla\Phi$ 平行于 z 轴,其模为 64,试求常数 a,b,c 的值。

1.54 试求曲面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与 $z=x^2+y^2-3$ 在点 $(2,-1,2)$ 的夹角。

1.55 已知 $\Phi=2x^3y^2z^4$,试求 $\nabla\cdot\nabla\Phi$(即 $\mathrm{div\ grad}\Phi$),并证明 $\nabla\cdot\nabla\Phi=\nabla^2\Phi$。

1.56 试证:(1) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla\cdot\boldsymbol{b}$; (2) $\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{a})=(\nabla\Phi)\cdot\boldsymbol{a}+\Phi(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$。

1.57 试证 $\nabla\cdot\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=0$。

1.58 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}/r^n$, $n>0$(其中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=|\boldsymbol{r}|$),试求 $\nabla\cdot\boldsymbol{a}$。

1.59 试求:(1) $\nabla\cdot(r^3\boldsymbol{r})$; (2) $\nabla\cdot[r\nabla(1/r^3)]$; (3) $\nabla^2[\nabla\cdot(\boldsymbol{r}/r^2)]$。

1.60 设 $\boldsymbol{a}=xz^3\boldsymbol{i}-2x^2yz\boldsymbol{j}+2yz^4\boldsymbol{k}$,试求在点 $(1,-1,1)$ 的 $\nabla\times\boldsymbol{a}$(即 $\mathrm{curl}\boldsymbol{a}$)。

1.61 设 $\boldsymbol{a}=2xz^2\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+3xz^3\boldsymbol{k}$, $\Phi=x^2yz$,试求在点 $(1,-1,1)$ 处的 (1) $\nabla\times\boldsymbol{a}$; (2) $\mathrm{curl}(\Phi\boldsymbol{a})$; (3) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})$; (4) $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{a})$; (5) $\mathrm{curl\ grad}(\Phi\boldsymbol{a})$。

1.62 设 $\nabla\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,试求 $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$。

1.63 试求 $\nabla\times(\boldsymbol{r}/r^2)$。

1.64 试证:(1) $\nabla\times(\nabla\Phi)=\boldsymbol{0}$; (2) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$。

1.65 设 $f(r)$ 可导,试求 $\mathrm{curl}(\boldsymbol{r}f(r))$。

1.66 试证 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=-\nabla^2\boldsymbol{a}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$。

1.67 设 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\omega}$ 是常矢,试证 $\boldsymbol{\omega}=\dfrac{1}{2}\mathrm{curl}\boldsymbol{V}$。

1.68 设 $\Phi(x,y,z)$ 对于轴的旋转是一标量不变量,试证 $\mathrm{grad}\Phi$ 在这种变换下是一矢量不变量。

1.69 设 $\boldsymbol{a}=(3x^2+6y)\boldsymbol{i}-14yz\boldsymbol{j}+20xz^2\boldsymbol{k}$，试求从点(0,0,0)到点(1,1,1)的积分 $\int_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，所沿路径 C 分别如下：

(1) $x=t, y=t^2, z=t^3$；

(2) 直线从点(0,0,0)到点(1,0,0)，再到点(1,1,0)，最后到点(1,1,1)；

(3) 点(0,0,0)到点(1,1,1)连成的直线。

1.70 设 $\boldsymbol{a}=(2y+3)\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+(yz-x)\boldsymbol{k}$，试求积分 $\int_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，所沿路径 C 及其始、终点如下：

(1) $x=2t^2, y=t, z=t^3$，从 $t=0$ 到 $t=1$；

(2) 直线从点(0,0,0)到点(0,0,1)，再到点(0,1,1)，最后到点(2,1,1)；

(3) 点(0,0,0)到点(2,1,1)连成的直线。

1.71 (1) 若 $\boldsymbol{F}=\nabla\Phi$，式中 Φ 是单值连续函数，且其偏导数存在，试证明在该场中，力 $\boldsymbol{F}$ 做的功与两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 连接的路径无关；

(2) 反之，若 $\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与两点连接的路径无关，证明函数 Φ 恰好满足 $\boldsymbol{F}=\nabla\Phi$。

1.72 (1) 若 $\boldsymbol{F}$ 是保守场，试证 $\mathrm{curl}\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$(即无旋场)；

(2) 反之，若 $\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{F}$ 是保守场。

1.73 设 $\boldsymbol{a}=(x-y)\boldsymbol{i}+(x+y)\boldsymbol{j}$，试求沿图 1.24 的路径的积分 $\oint_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。

1.74 设 $\Phi=2xyz^2$，$\boldsymbol{F}=xy\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$，路径 C 是曲线 $x=t^2, y=2t, z=t^3$，试求沿此路径从 $t=0$ 到 $t=1$ 的下列积分：(1) $\int_C \Phi\mathrm{d}\boldsymbol{r}$；(2) $\int_C \boldsymbol{F}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。

1.75 (1) 试证 $\boldsymbol{F}=(y^2\cos x+z^3)\boldsymbol{i}+(2y\sin x-4)\boldsymbol{j}+(3xz^2+2)\boldsymbol{k}$ 是保守力场；(2) 求 $\boldsymbol{F}$ 的势(标量)；(3) 求从点(0,1,−1)到点($\pi/2$,−1,2)力 $\boldsymbol{F}$ 做的功。

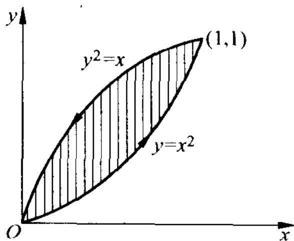


图 1.24

1.76 计算 $\iint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s$，式中 $\boldsymbol{a}=z\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}-3y^2z\boldsymbol{k}$，$S$ 是从 $z=0$ 到 $z=5$ 第一象限 $x^2+y^2=16$ 的圆柱表面。

1.77 设 $\boldsymbol{a}=(3x+y)\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}+(y-2)\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，试计算积分 $\oint_C (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。积分路径是沿 xy 平面的圆周，圆心在原点，半径为 2，逆时针方向。

1.78 设 $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}+(x-2xz)\boldsymbol{j}-xy\boldsymbol{k}$，试计算积分 $\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$。式中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在 xy 平面的上部表面。

1.79 计算下列两种情况下的积分$\iint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$。(1) $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}+2x\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}$，$S$是第一象限内$2x+y=6$平面的顶部被$z=4$平面所切的表面；(2) $\boldsymbol{a}=(x+y^2)\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j}+2yz\boldsymbol{k}$，$S$是第一象限内$2x+y+2z=6$平面的表面。

1.80 设$\boldsymbol{F}=4xz\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+yz\boldsymbol{k}$，试计算$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$。$S$是一立方体的表面，其边界为$x=0,x=1;y=0,y=1;z=0,z=1$。

1.81 计算$\int_{(0,0)}^{(2,1)}(10x^4-2xy^3)\mathrm{d}x-3x^2y^2\mathrm{d}y$，所沿路径是$x^4-6xy^3=4y^2$。

1.82 试证以曲线C单连封闭的图形面积由式$\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$计算。

1.83 试证在单连通域里当且仅当处处都有$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，则曲线$C$为封闭边界时，$\oint_C M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$。

1.84 设$\boldsymbol{F}=\frac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}$，(1)求$\nabla\times\boldsymbol{F}$；(2)计算沿任意封闭边界的积分$\oint\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，并解释计算结果。

1.85 设$\boldsymbol{a}=4x\boldsymbol{i}-2y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$，取$x^2+y^2=4$和$z=0,z=3$所围的域，验证斯托克斯定理。

1.86 计算$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$，式中$\boldsymbol{F}=4xz\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+yz\boldsymbol{k}$，$S$是以$x=0,x=1;y=0,y=1;z=0,z=1$为边界的立方体表面。

1.87 计算$\iint_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$，式中$S$是封闭曲面。

1.88 试证$\iiint_V(\Phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\Phi)\mathrm{d}V=\iint_S(\Phi\nabla\psi-\psi\nabla\Phi)\mathrm{d}S$。

1.89 试证$\iiint_V\nabla\Phi\mathrm{d}V=\iint_S\Phi\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$。

1.90 试证$\iiint_V\nabla\times\boldsymbol{b}\mathrm{d}V=\iint_S\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{b}\mathrm{d}S$。

1.91 设S是一闭曲面，$\boldsymbol{r}$是任一点$P(x,y,z)$从原点O量起的位矢，试证明：(1) 若原点O在S的外边，积分$\iint_S\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}S=0$；(2) 若原点$O$在$S$的内部，积分$\iint_S\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}S=4\pi$。

1.92 试证$\oint\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{b}=\iint_S(\boldsymbol{n}\times\nabla)\times\boldsymbol{b}\mathrm{d}S$。

第2章
矩　　阵

矩阵运算是张量运算的基础，而且有许多类似之处。本章首先讲解矩阵的代数运算、方阵的求逆和转置。本征方程、本征值和本征矢量具有重要的物理、力学意义，共轭矩阵、埃尔米特(Hermite)矩阵和酉矩阵是矩阵的特殊形式。讲解了矩阵对角化的一般方法之后，有典型例题示范。最后讲解了凯莱-哈密顿(Kayley-Hamiltom)定理和极分解定理。

2.1　矩阵的加法与乘法

1. 矩阵的定义

任意域 K 中 $m\times n$ 个元素的有序矩形阵列称为一个 K 上的矩阵，记作

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

a_{ij} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 行第 j 列的元素。指标 i 取值 $1,2,\cdots,m$；而指标 j 取值 $1,2,\cdots,n$。$m=n$ 的矩阵称为方阵，这个相同的行列数称为方阵的阶。只有一行元素的矩阵称为行阵，只有一列元素的矩阵称为列阵，分别记为

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix} \tag{2.2}$$

当且仅当两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同、列数相同，而且对应行列中的所有元素都相等时，两个矩阵定义为相等。

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B} \quad 即 \quad a_{ij}=b_{ij} \tag{2.3}$$

所有元素都为零的矩阵称为**零矩阵**，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\mathbf{0}_{mn}$。

2. 矩阵与数的乘法

用数 α 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 或用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 乘 α 的积，定义为把 $\boldsymbol{A}$ 中所有元素都乘上 α 后所得出的矩阵。例如

$$3\begin{pmatrix}1 & 5\\3 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\3 & -8\end{pmatrix}3=\begin{pmatrix}3 & 15\\9 & -24\end{pmatrix}$$

由数与矩阵的乘法定义，得到下列性质

$$1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A} \tag{2.4}$$

$$0\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{2.5}$$

$$\alpha(\beta\boldsymbol{A})=(\alpha\beta)\boldsymbol{A} \tag{2.6}$$

$$\det(\alpha\boldsymbol{A})=\alpha^n\det\boldsymbol{A} \tag{2.7}$$

式(2.7)中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，“$\det\boldsymbol{A}$”表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，因为用 α 乘行列式的任一行中诸元素后，行列式的值变为原值的 α 倍，用 α 乘方阵 $\boldsymbol{A}$ 时，各行的元素都应乘以 α，故有式(2.7)的结果。

3. 矩阵的加法

两个行数相同、列数相同的矩阵可以相加，其和为将两矩阵行列数相同处的诸元素相加而得的矩阵

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \quad 即 \quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \tag{2.8}$$

由矩阵的加法定义可得下列性质

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \quad （交换律） \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} \quad （结合律） \tag{2.10}$$

$$\alpha(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\alpha\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{B} \quad （分配律） \tag{2.11}$$

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{A}=\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{A} \quad （分配律） \tag{2.12}$$

还可推得

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{A},\cdots \tag{2.13}$$

引入记法 $(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$，可得

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0},\quad (-\alpha)\boldsymbol{A}=-\alpha\boldsymbol{A},\quad -(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$$
$$-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$$

4. 矩阵的乘法

设两矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数,它们的乘积为矩阵 $\boldsymbol{C}$,记为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{C}$ 的元素为

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

即两可乘矩阵的乘积为一矩阵,其第 i 行第 j 列的元素为第一矩阵第 i 行诸元素与第二矩阵第 j 列诸元素依次逐对相乘的乘积之和。

例如

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18 & 19\\-16 & -13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & -7\\-26 & -8\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}18 & 19\\-16 & -13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}75 & 131\\-55 & -97\end{pmatrix}$$

可见,矩阵的乘法不一定是可易的,即一般情况下,

$$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$$

由矩阵的乘法定义,可推出下列关系

$$\alpha(\boldsymbol{AB})=(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{B})\quad(\text{结合律})\tag{2.14}$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}\quad(\text{分配律})\tag{2.15}$$
$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}\quad(\text{分配律})\tag{2.16}$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}\quad(\text{结合律})\tag{2.17}$$

现证明(2.14)、(2.17)两式,其余两式请读者自证。

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素为 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的元素为 $b_{jk}(j=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots,p)$。由乘法规则知矩阵 $\alpha(\boldsymbol{AB})$ 中第 i 行第 k 列的元素为

$$\alpha(a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk})$$

同理,知矩阵 $(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{B})$ 中第 i 行第 k 列的元素分别为

$$(\alpha a_{i1})b_{1k}+(\alpha a_{i2})b_{2k}+\cdots+(\alpha a_{in})b_{nk}$$
$$a_{i1}(\alpha b_{1k})+a_{i2}(\alpha b_{2k})+\cdots+a_{in}(\alpha b_{nk})$$

因为这三式是相等的,故式(2.14)成立。

设

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{D},\quad \boldsymbol{BC}=\boldsymbol{G}$$

由矩阵的乘法规则,有

$$d_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk}$$
$$g_{il}=b_{j1}c_{1l}+b_{j2}c_{2l}+\cdots+b_{jn}c_{nl}$$

以 $\boldsymbol{D}$ 乘 $\boldsymbol{C}$ 得 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 l 列的元素为

$$d_{i1}c_{1l}+d_{i2}c_{2l}+\cdots+d_{ip}c_{pl}=\sum_{k}\sum_{j}a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

同理,以 $\boldsymbol{A}$ 乘 $\boldsymbol{G}$ 得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 的第 i 行第 l 列的元素为

$$a_{i1}g_{1l}+a_{i2}g_{2l}+\cdots+a_{ip}g_{pl}=\sum_{j}\sum_{k}a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

除加法的次序不同外,两式完全相等,故式(2.17)成立。

由式(2.17)知,对于有一定顺序的矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\cdots$ 的乘积可以不必在它们之间另加括弧,所以我们不但可以将这条规则用于三个矩阵的乘积,也可用于多个矩阵的乘积。例如四个矩阵的乘积 $\boldsymbol{ABCD}$ 可以写成

$$[(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}]\boldsymbol{D},\quad [\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})]\boldsymbol{D},\quad \boldsymbol{A}[(\boldsymbol{BC})\boldsymbol{D}],\quad \boldsymbol{A}[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{CD})],\quad (\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{CD})$$

对于一般情况下矩阵乘法的结合律(式 2.17),可用数学归纳法证明。

矩阵的加法与乘法并不是对任何两个矩阵都能施行,要受到它们之间行列数的某些限制。我们所论述的加法与乘法中,都假定这些矩阵是可加的或可乘的。

容易证明,两方阵乘积的行列式等于它们的行列式的乘积,即

$$\det(\boldsymbol{AB})=\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B} \tag{2.18}$$

方阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘幂定义为

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA},\ \boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{AAA},\ \cdots,\ \boldsymbol{A}^p=\overbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}^{p}$$

例 2.1 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}$ 时,求 $\boldsymbol{A}^{p+1}$(p 为正整数)。

解 由于

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2a&a^2+2b\\0&1&2a\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}1&2a&a^2+2b\\0&1&2a\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3a&a^2(1+2)+3b\\0&1&3a\\0&0&1\end{pmatrix}$$

可知

$$\boldsymbol{A}^p=\begin{pmatrix}1&pa&a^2[1+2+\cdots+(p-1)]+pb\\0&1&pa\\0&0&0\end{pmatrix}$$

成立,从而

$$A^{p+1}=\begin{pmatrix}1 & pa & a^2[1+2+\cdots+(p-1)]+pb\\0 & 1 & pa\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a & b\\0 & 1 & a\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & (p+1)a & a^2(1+2+\cdots+p)+(p+1)b\\0 & 1 & (p+1)a\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

2.2 方阵的逆阵

对角线上的元素均为1,而其他元素均为零的方阵称为么方阵,记作

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix} \tag{2.19}$$

由矩阵的乘法规则,显然对于任何方阵均可得

$$AI = IA = A \tag{2.20}$$

此等式表征了么方阵 I 的基本性质。形如方阵

$$\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\0 & a_{22} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

的矩阵称为对角形方阵,记作 $\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$。

从运算规则显然易得:两对角形方阵之和与积仍为一对角形方阵。

如果对于方阵 A 有这样的方阵 X 存在,使得

$$XA = AX = I$$

我们说 A 是可逆的,称 X 为 A 的逆阵,记作 $X=A^{-1}$。

容易证明,可逆方阵的逆阵是惟一的,所以用 A^{-1} 表示的逆阵是统一的。

如果 Y 也是 A 的逆阵,用 X 左乘 $AY=I$,得 $XA\cdot Y=X$,也就是 $Y=X$。同样,用 X 右乘 $YA=I$,也得 $Y=X$。

逆阵有如下性质(A、B 均为可逆,α 为标量):

$$(A^{-1})^{-1} = A \tag{2.21}$$

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1},\quad \alpha\neq 0 \tag{2.22}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{2.23}$$

我们只证明式(2.23)。

由于

$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{IB} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$$

$$(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BB}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{AIA}^{-1} = \boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}$$

$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{AB}) = (\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}) = \boldsymbol{I}$$

由定义可知

$$(\boldsymbol{AB}^{-1}) = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

这一性质可以推广到多个矩阵的情况,即若 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_t$ 是 n 阶可逆阵,则 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_t$ 可逆,且

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_t)^{-1} = \boldsymbol{A}_t^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1} \tag{2.24}$$

定义 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 构成的方阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵,记为 $\mathrm{adj}\boldsymbol{A}$。

定义 当方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式不为零时,称 $\boldsymbol{A}$ 为满秩方阵,否则称为降秩方阵。

定理 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为满秩方阵,并且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\boldsymbol{A}}{\det\boldsymbol{A}} \tag{2.25}$$

证 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则有方阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$。由式(2.18),有

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B} = \det\boldsymbol{I} = 1$$

故

$$\det\boldsymbol{A} \neq 0$$

反之,设 $\boldsymbol{A}$ 为满秩方阵,则 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$,$\frac{\mathrm{adj}\boldsymbol{A}}{\det\boldsymbol{A}}$存在,于是

$$\left(\frac{\mathrm{adj}\boldsymbol{A}}{\det\boldsymbol{A}}\right)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\left(\frac{\mathrm{adj}\boldsymbol{A}}{\det\boldsymbol{A}}\right) = \boldsymbol{I}$$

$$(\mathrm{adj}\boldsymbol{A})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\mathrm{adj}\boldsymbol{A}) = (\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$$

因为方阵 $\boldsymbol{A}(\mathrm{adj}\boldsymbol{A})$ 的第 i 行第 j 列元素为

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$$

由行列式的性质可知,当 $i\neq j$ 时,此式为零;当 $i=j$ 时,此式等于 $\det\boldsymbol{A}$,所以 $\boldsymbol{A}(\mathrm{adj}\boldsymbol{A}) = (\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$。同理有 $(\mathrm{adj}\boldsymbol{A})\boldsymbol{A} = (\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$。

因此,由逆阵的惟一性得

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\boldsymbol{A}}{\det\boldsymbol{A}}$$

式(2.25)给出了用伴随阵求逆阵的一种方法。当然，求逆阵还有其他方法，这里不一一叙述。

例 2.2 求方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}$ 的逆阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

解 先求伴随阵 adj$\boldsymbol{A}$。

$$\mathrm{adj}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3&4\\4&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&3\\4&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&4\\1&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&3\\1&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\1&4\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-7&6&-1\\1&0&-1\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

因为

$$\det\boldsymbol{A}=-2$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\mathrm{adj}\boldsymbol{A}}{\det\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}7/2&-3&1/2\\-1/2&0&1/2\\-1/2&1&-1/2\end{pmatrix}$$

2.3 转 置 矩 阵

定义 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

的转置矩阵是 $n\times m$ 矩阵，即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

把 $\boldsymbol{A}$ 变为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 称为对 $\boldsymbol{A}$ 作了转置。

对于任意两矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$(可加或可乘的),有下列转置关系:

$$(\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\alpha\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\beta\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \tag{2.26}$$

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \tag{2.27}$$

其中,α,β 为任意两标量。式(2.26)很容易证明,现在证明式(2.27)。$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 中第 i 行第 j 列的元素等于 $\boldsymbol{AB}$ 中第 j 行第 i 列的元素,就是

$$a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots+a_{jn}b_{ni}$$

其中 a_{ij},b_{ij} 各为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的元素。但此式为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 中第 i 行元素与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 中第 j 列的对应元素的乘积之和,故知 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。

设 $\boldsymbol{A}$ 为一满秩方阵,由 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I}$,按转置规则可得 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$,故有

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{2.28}$$

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$(即 $a_{ij}=a_{ji}$)的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为对称矩阵。$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$(即 $a_{ij}=-a_{ji}$)的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为反对称矩阵。

若 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$,即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$,称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵。因一行列式的值与其转置行列式之值相等,所以

$$\det(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})=\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=1$$

$$(\det\boldsymbol{A})^2=1$$

$$\det\boldsymbol{A}=\pm 1$$

可见正交矩阵行列式的值等于 ± 1。$\det\boldsymbol{A}=1$ 时,称 $\boldsymbol{A}$ 为正规正交矩阵;$\det\boldsymbol{A}=-1$ 时,称 $\boldsymbol{A}$ 为非正规正交矩阵。

将 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$ 转置,得

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}$$

可见正交矩阵的逆阵仍为正交矩阵。

设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{-1}$,则

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{AB})^{-1}$$

可见正交矩阵的乘积仍为正交矩阵。

2.4 本征值与本征矢量

1. 方阵的本征值与本征矢量

设 $\boldsymbol{A}$ 为给定的 n 阶方阵,对于数 λ 与 n 维的非零矢量所构成的列阵 $\boldsymbol{X}$,

$$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X} \quad 或 \quad (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0} \tag{2.29}$$

成立时,称 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的本征值,$\boldsymbol{X}$ 称为对于本征值 λ 的本征矢量。

式(2.29)对于 $\boldsymbol{X}$ 有非零解的条件是

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}-\lambda\end{vmatrix}=0 \qquad (2.30)$$

这个 λ 的 n 次方程称为 $\boldsymbol{A}$ 的本征方程，它的 n 个根就是 $\boldsymbol{A}$ 的本征值。

例 2.3 求矩阵 $\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{pmatrix}$ 的本征值与本征矢量。

解 本征方程

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2+\mathrm{i}^2=\lambda(\lambda-2)=0$$

所以本征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=2$。

由

$$\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^{(1)}\\ x_2^{(1)}\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}x_1^{(1)}\\ x_2^{(1)}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^{(2)}\\ x_2^{(2)}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x_1^{(2)}\\ x_2^{(2)}\end{pmatrix}$$

得

$$x_1^{(1)}=\mathrm{i}x_2^{(1)},\quad x_1^{(2)}=-\mathrm{i}x_2^{(2)}$$

可见，对于本征值 0 的本征矢量为 $c\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\ 1\end{pmatrix}$，对于本征值 2 的本征矢量为 $c\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\ 1\end{pmatrix}$（$c$ 为非零任意数）。

例 2.4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的本征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 时，试证：(1) $\det\boldsymbol{A}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$；(2) $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$（矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角元素之和称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹，表示为 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$）。

证 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的本征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{pmatrix}$$

$$=a_n+a_{n-1}\lambda+\cdots+a_1\lambda^{n-1}+(-1)^n\lambda^n=0 \qquad (a)$$

由于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为本征值，因而

$$a_n+a_{n-1}\lambda+\cdots+a_1\lambda^{n-1}+(-1)^n\lambda^n$$

$$=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda) \qquad (b)$$

(1) 式(a)中,令 $\lambda=0$,得 $\det \boldsymbol{A}=a_n$;式(b)中,令 $\lambda=0$,得 $a_n=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$。所以

$$\det \boldsymbol{A} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

(2) 在本征方程的行列式的表示中,虽然主对角线元素的乘积是

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$$

但其余的项不可能出现 λ 的 $n-1$ 次以上的次数。这是因为行列式是从各行、各列分别取出一元素所作成的 n 个元素乘积的 $n!$ 个的和。因此除主对角线元素的乘积以外各项的对角线元素至少有两个消失了。故对于 λ 项多是 $n-2$ 次。

比较$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$,$(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$中的 λ^{n-1}的系数,得

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A} = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn} = \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$$

2. 共轭矩阵、埃尔米特(Hermite)矩阵、酉矩阵

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各元素用其共轭复数代换所作成的矩阵,称为 $\boldsymbol{A}$ 的**共轭矩阵**,记作 $\bar{\boldsymbol{A}}$。即

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\text{ 时},\quad \bar{\boldsymbol{A}}=(\bar{a}_{ij})$$

显然 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置矩阵$(\bar{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}=(\overline{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}})$。

$(\bar{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 时,称 $\boldsymbol{A}$ 为**埃尔米特矩阵**。即方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,对所有的 i,j,有 $a_{ij}=\bar{a}_{ji}$。由于 $a_{ii}=\bar{a}_{ii}$,所以对角线上的元素都是实数。

例如$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & -1 & 1 \\ 1+\mathrm{i} & 1 & 2 \end{pmatrix}$是埃尔米特矩阵。

实对称矩阵当然是埃尔米特矩阵。

方阵满足 $\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{I}$ 时,$\boldsymbol{U}$ 称为**酉矩阵**。

例如$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$是酉矩阵。

由定义可知,酉矩阵的行列式的绝对值是1,实酉矩阵与正交矩阵是一回事。

满足 $\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$ 的方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**正规矩阵**。埃尔米特矩阵、酉矩阵都是正规矩阵。

定理 埃尔米特矩阵的本征值是实数,作为特殊情况,实对称矩阵的本征值是实数。

证 设 $\boldsymbol{H}$ 为埃尔米特矩阵,λ 为本征值时,则有使得 $\boldsymbol{HX}=\lambda\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 的 $\boldsymbol{X}$ 存在。

$$\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{HX}) = \bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{X}) = \lambda\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$$

同时

$$\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{HX}) = \bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}) = (\bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}$$

$$= (\overline{\boldsymbol{HX}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = (\overline{\lambda\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \bar{\lambda}\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$$

因此

$$\lambda\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \bar{\lambda}\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$$

由 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,得 $\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}>0$,所以 $\bar{\lambda}=\lambda$,即 λ 是实数。

实对称矩阵是埃尔米特矩阵,所以其本征值为实数。

定理 酉矩阵的本征值的绝对值是 1。作为特殊情况,正交矩阵的本征值的绝对值是 1。

证 设 U 是酉矩阵,λ 为其本征值,则有使得 $U\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 的 $\boldsymbol{X}$ 存在。

$$\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{X} = \overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\overline{U}^{\mathrm{T}}U\boldsymbol{X} = (\overline{U\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}U\boldsymbol{X}$$
$$= (\overline{\lambda\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\lambda\boldsymbol{X} = \lambda\bar{\lambda}\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$$

因此有$(1-\lambda\bar{\lambda})\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=0$,但是 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,得 $\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}>0$,所以 $1=\lambda\bar{\lambda}=|\lambda|^2$,从而$|\lambda|=1$。

因为正交矩阵是酉矩阵,所以正交矩阵的本征值的绝对值是 1。

3. 矩阵的对角化

设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,由式(2.29)有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(i)} = \lambda_{(i)}\boldsymbol{X}^{(i)} \tag{a}$$

左乘 $\boldsymbol{X}^{(j)\mathrm{T}}$,得

$$\boldsymbol{X}^{(j)\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(i)} = \lambda_{(i)}\boldsymbol{X}^{(j)\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(i)} \tag{b}$$

同理,有

$$\boldsymbol{X}^{(i)\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(j)} = \lambda_{(j)}\boldsymbol{X}^{(i)\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(j)} \tag{c}$$

将式(b)转置,得

$$\boldsymbol{X}^{(i)\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(j)} = \lambda_{(i)}\boldsymbol{X}^{(i)\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(j)} \tag{d}$$

将式(d)减去式(c),得

$$\boldsymbol{0} = (\lambda_{(i)} - \lambda_{(j)})\boldsymbol{X}^{(i)\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(j)} \tag{e}$$

设 $\lambda_{(i)}\neq\lambda_{(j)}$,则

$$\boldsymbol{X}^{(i)\mathrm{T}}X^{(j)} = \boldsymbol{0}$$

因此,对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的本征值 $\lambda_{(i)}$ 与 $\lambda_{(j)}$ 相伴的本征矢量具有性质 $\boldsymbol{X}^{(i)\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(j)}=\boldsymbol{0}$,所以这两个列阵是正交的。

一般如果本征值是互异的,则

$$\boldsymbol{X}^{(i)\mathrm{T}}X^{(j)} = \boldsymbol{0}, \quad i \neq j \tag{2.31}$$

选择适当的标量因子,可将本征矢量 $\boldsymbol{X}^{(i)}$ 正规化或称正交归一化,使得 $\boldsymbol{X}^{(i)\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(i)}=\boldsymbol{1}$。一般可将本征矢量正规化,使得

$$\boldsymbol{X}^{(i)\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(j)} = \boldsymbol{1}, \quad i = j \tag{2.32}$$

严格说来,式(2.31)与式(2.32)的右边是矩阵,但大多数情况下,可将它们看成标量。

用正交归一的 $X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(n)}$ 组成

$$P=\begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X^{(1)\mathrm{T}} \\ X^{(2)\mathrm{T}} \\ \vdots \\ X^{(n)\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$P^{\mathrm{T}}=(X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(n)})$$

因为 $PP^{\mathrm{T}}=I$，所以 P 是正交矩阵。

$$\begin{aligned} AP^{\mathrm{T}} &= (AX^{(1)},\ AX^{(2)},\ \cdots,\ AX^{(n)}) \\ &= (\lambda_1 X^{(1)},\lambda_2 X^{(2)},\ \cdots,\ \lambda_n X^{(n)}) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = PAP^{\mathrm{T}} &= \begin{bmatrix} X^{(1)\mathrm{T}} \\ X^{(2)\mathrm{T}} \\ \vdots \\ X^{(n)\mathrm{T}} \end{bmatrix}(\lambda_1 X^{(1)},\ \lambda_2 X^{(2)},\ \cdots,\ \lambda_n X^{(n)}) \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) \end{aligned} \tag{2.33}$$

可见 $P^{-1}AP$ 是以 A 的本征值作为其主对角元素的对角阵，记为 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$。

一般的情况是：对于正规矩阵 A（即 $\bar{A}^{\mathrm{T}}A=A\bar{A}^{\mathrm{T}}$），存在适当的酉矩阵 U，可使 $U^{-1}AU$ 为对角矩阵。这个对角阵的对角线上的元素是 A 的本征值。反之，由酉矩阵能对角化的矩阵是正规矩阵。n 阶矩阵 A 的正规矩阵的必要与充分条件是，能从 A 的 n 个特征矢量中取出正规正交系。显然，若 A 是实对称矩阵，则可由正交矩阵将其化为对角阵（有关证明请参考线性代数或矩阵论）。

例 2.5 试证能用酉矩阵使其对角化的矩阵是正规矩阵。

证 设 A 为方阵，U 为酉矩阵，$\bar{U}^{\mathrm{T}}AU=D$ 是对角矩阵，这时显然 $\bar{D}^{\mathrm{T}}D=D\bar{D}^{\mathrm{T}}$。由于 $\bar{U}^{\mathrm{T}}AU=D$，故有 $A=UD\bar{U}^{\mathrm{T}}$。于是

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}A=(U\bar{D}^{\mathrm{T}}\bar{U}^{\mathrm{T}})(UD\bar{U}^{\mathrm{T}})=U\bar{D}^{\mathrm{T}}D\bar{U}^{\mathrm{T}}$$

$$A\bar{A}^{\mathrm{T}}=(UD\bar{U}^{\mathrm{T}})(U\bar{D}^{\mathrm{T}}\bar{U}^{\mathrm{T}})=UD\bar{D}^{\mathrm{T}}\bar{U}^{\mathrm{T}}$$

所以

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}A=A\bar{A}^{\mathrm{T}}$$

设正规矩阵 A 用酉矩阵变形为对角矩阵时，

$$AU = U\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

U 的列矢量设为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 时，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是正规正交系，

$$AU = A(X_1, X_2, \cdots, X_n) = (AX_1, AX_2, \cdots, AX_n)$$

$$= (X_1, X_2, \cdots, X_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \cdots, \lambda_n X_n)$$

所以，$AX_i = \lambda_i X_i$，即 X_i 是对应于本征值 λ_i 的本征矢量。

例 2.6 把下面的矩阵化为对角形矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -12 & 1 \end{pmatrix}$$

解 先求本征值。

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 4 & -12 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

本征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$。

由计算易得，对应于 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$ 的本征矢量分别为$(3,1,-1)$，$(4+2i, 1+i, -4)$，$(4-2i, 1-i, -4)$，它们线性无关。取

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 4+2i & 4-2i \\ 1 & 1+i & 1-i \\ -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

可得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

由式(2.33)，有

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

又由例 2.4 可知

$$\mathrm{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

故有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}) = \mathrm{tr}\boldsymbol{A}$$

再则

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2$$

另一方面

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^2 = \mathrm{tr}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APP}^{-1}\boldsymbol{AP} = \mathrm{tr}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P} = \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2$$

故有

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 \tag{2.34}$$

定理 λ^n（n 为整数）是 $\boldsymbol{A}^n$ 的本征值，$\boldsymbol{X}$ 是其本征矢量，即

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X} = \lambda^n\boldsymbol{X} \tag{2.35}$$

证 令 m 为正整数，设 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{X}=\lambda^m\boldsymbol{X}$，则

$$\boldsymbol{A}^{m+1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{AA}^m\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\lambda^m\boldsymbol{X} = \lambda^m\boldsymbol{AX} = \lambda^{m+1}\boldsymbol{X}$$

若 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}=\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\lambda\boldsymbol{X}=\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX}=\lambda^{-1}\boldsymbol{X}$，设 $\boldsymbol{A}^{-m}\boldsymbol{X}=\lambda^{-m}\boldsymbol{X}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{-(m+1)}\boldsymbol{X} &= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^{-m}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\lambda^{-m}\boldsymbol{X} \\ &= \lambda^{-m}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X} = \lambda^{-m}\lambda^{-1}\boldsymbol{X} = \lambda^{-(m+1)}\boldsymbol{X}\end{aligned}$$

例 2.7 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{100}$。

解 先求本征值与本征矢量。

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda-1)^2(\lambda+2) = 0\end{aligned}$$

故本征值 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$。对应于 $\lambda_1=-2$，方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 成为

$$\begin{cases} 6x_1^{(1)} + 6x_2^{(1)} = 0 \\ -3x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)} = 0 \\ -3x_1^{(1)} - 6x_2^{(1)} + 3x_3^{(1)} = 0 \end{cases}$$

其基础解是(−1,1,1)，即对应于 $\lambda_1=-2$ 的本征矢量可写为(−1,1,1)。

同样可以求得对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的本征矢量可写为(−2,1,0)，(0,0,1)。

容易验证，这三个本征矢量是线性无关的。

取

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

因为

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\\ &=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^2\boldsymbol{P}^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{100}&=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{100}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2^{100} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{100} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-2^{100} & -2 & 0\\ 2^{100} & 1 & 0\\ 2^{100} & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-2^{100}+2 & -2^{101}+2 & 0\\ 2^{100}-1 & 2^{101}-1 & 0\\ 2^{100}-1 & 2^{101}-2 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

2.5 凯莱-哈密顿定理

凯莱-哈密顿(Cayley-Hamilton)定理：设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，它的本征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}) = (-1)^n\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

则有

$$(-1)^n\boldsymbol{A}^n + a_1\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\boldsymbol{A} + a_n\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0} \tag{2.36}$$

该定理还可表述为：方阵满足它自己的本征方程。

证 伴随矩阵 $\mathrm{adj}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})$ 的元素中含 λ 的最高幂次为 $n-1$ 次，即最高到 λ^{n-1} 项，表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{adj}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}) = {} & \boldsymbol{B}_0\lambda^{n-1} + \boldsymbol{B}_1\lambda^{n-2} + \boldsymbol{B}_2\lambda^{n-3} + \cdots \\ & + \boldsymbol{B}_{n-3}\lambda^2 + \boldsymbol{B}_{n-2}\lambda + \boldsymbol{B}_{n-1}\end{aligned}$$

根据行列式展开的性质有

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\mathrm{adj}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{I}\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})$$

故有

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})(\boldsymbol{B}_0\lambda^{n-1} + \boldsymbol{B}_1\lambda^{n-2} + \boldsymbol{B}_2\lambda^{n-3} + \cdots + \boldsymbol{B}_{n-3}\lambda^2 + \boldsymbol{B}_{n-2}\lambda + \boldsymbol{B}_{n-1}) \\ &= \boldsymbol{I}[(-1)^n\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n]\end{aligned}$$

使上述等式两边 λ 各次幂的系数相等，得

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{B}_0 &= (-1)^n\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_0 - \boldsymbol{B}_1 &= a_1\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2 &= a_2\boldsymbol{I} \\ &\vdots \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_{n-3} - \boldsymbol{B}_{n-2} &= a_{n-2}\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_{n-2} - \boldsymbol{B}_{n-1} &= a_{n-1}\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_{n-1} &= a_n\boldsymbol{I}\end{aligned}$$

将以上各式从上到下按顺序分别乘以 $\boldsymbol{A}^n, \boldsymbol{A}^{n-1}, \boldsymbol{A}^{n-2}, \cdots, \boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}$，并相加得

$$(-1)^n\boldsymbol{A}^n + a_1\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\boldsymbol{A} + a_0\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$$

例 2.8 3×3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的本征方程可写成

$$\lambda^3 - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2 + (\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)\lambda - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$$

即

$$\lambda^3 - \lambda^2\mathrm{tr}\boldsymbol{A} + \frac{1}{2}\lambda[(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2 - \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2] - \det\boldsymbol{A} = 0$$

根据凯莱-哈密顿定理，即方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足它自己的本征方程，于是有

$$\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2\mathrm{tr}\boldsymbol{A}+\frac{1}{2}\boldsymbol{A}[(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2]-\boldsymbol{I}\det\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$$

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶满秩方阵，当其本征方程写成 $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$ 时，根据凯莱-哈密顿定理，有

$$\boldsymbol{A}^n+a_1\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}+a_n\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$$

即

$$a_n\boldsymbol{I}=-(\boldsymbol{A}^{n-1}+a_1\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}$$

因为

$$\det\boldsymbol{A}\neq 0$$

所以

$$a_n\neq 0$$

故有

$$-\frac{1}{a_n}(\boldsymbol{A}^{n-1}+a_1\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$$

根据逆阵的定义，有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=-\frac{1}{a_n}(\boldsymbol{A}^{n-1}+a_1\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{I}) \tag{2.37}$$

式(2.37)表明，$\boldsymbol{A}^{-1}$可以由数与 $\boldsymbol{A}$(包括 $\boldsymbol{I}$)的乘幂之积的和来表示，因此可以用它来求逆阵。

例 2.9 求方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$的逆阵。

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 的本征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&1\\-2&1-\lambda&-1\\1&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda-1=0$$

根据式(2.37)，有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=-\frac{1}{(-1)}(-\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I})=-\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}$$

$$=-\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}^2+3\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6&5&-4\\5&-6&4\\-4&4&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&-6&3\\-6&3&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

如果知道 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的本征多项式 $F(\lambda)$，运用凯莱-哈密顿定理，$\boldsymbol{A}$ 的任意多项式的计算，可归结到次数为 $n-1$ 以下的多项式的计算。

设 $f(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的多项式，用 $F(\lambda)$ 除 $f(\lambda)$ 就得到如下的形式：

$$f(\lambda)=Q(\lambda)F(\lambda)+R(\lambda),R(\lambda)\text{的次数}\leqslant n-1$$

因 $F(\boldsymbol{A})=0$，得 $f(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$。因此，计算 $f(\boldsymbol{A})$ 时，只要计算 $R(\boldsymbol{A})$ 即可。

例 2.10 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，求 $2\boldsymbol{A}^8-3\boldsymbol{A}^5+\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{I}$。

解 $F(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda^3-2\lambda+1)$

而

$$\begin{aligned} & 2\lambda^8-3\lambda^5+\lambda^4+\lambda^2-4 \\ =& -(\lambda^3-2\lambda+1)(-2\lambda^5-4\lambda^4+5\lambda^2-9\lambda+14) \\ & +24\lambda^2-37\lambda+10 \end{aligned}$$

因为

$$F(\boldsymbol{A})=-(\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})=0$$

所以

$$\begin{aligned} & 2\boldsymbol{A}^8-3\boldsymbol{A}^5+\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{I} \\ =& 24\boldsymbol{A}^2-37\boldsymbol{A}+10\boldsymbol{I} \\ =& 24\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2-37\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}+10\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 24 & 48 & 48 \\ 0 & 48 & -24 \\ 0 & -24 & 24 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -37 & 0 & -74 \\ 0 & 37 & -37 \\ 0 & -37 & 0 \end{pmatrix} \\ & +\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 48 & -26 \\ 0 & 95 & -61 \\ 0 & -61 & 34 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.6 极分解定理

1. 正定矩阵

定义 (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称方阵,如果 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 对于列阵 $\boldsymbol{X}$ 的所有非零值都是正的,则称 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,即 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}>0$。

(2) 如果对于不全为零的任何实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,二次型

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0$$

则称此二次型是正定的,其对应的实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$称为正定矩阵。

定理 n 阶实对称方阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵的必要与充分条件是 $\boldsymbol{A}$ 的本征值都是正数。

证 必要性

若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,λ_i 是其本征值,而对应的本征矢量为 $\boldsymbol{X}_i$,且 $\det\boldsymbol{X}_i=1$,由定义可知

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}>0$$

因为

$$\boldsymbol{X}^{(i)\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}^{(i)}=\boldsymbol{X}^{(i)\mathrm{T}}\lambda_i\boldsymbol{X}^{(i)}=\lambda_i\boldsymbol{X}^{(i)\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(i)}=\lambda_i$$

所以

$$\lambda_i>0$$

充分性

若 $\boldsymbol{A}$ 的本征值 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,由式(2.33),可知,存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}&=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\\
\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\\
\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}&=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{PX}\\
&=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{XP}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PX}\\
&=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}
\end{aligned}$$

因 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,$\lambda_i>0$,故有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}>0$,所以 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵。

2. 矩阵的极分解定理

定理 一任意的非奇异方阵 $\boldsymbol{F}$ 可惟一地分解为一正交矩阵 $\boldsymbol{R}$ 与一正定对称矩阵 $\boldsymbol{U}$ 或 $\boldsymbol{V}$ 的乘积,即

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{RU}\quad 或\quad \boldsymbol{F}=\boldsymbol{VR}\tag{2.38}$$

证 存在性

令 $C=F^TF$,并令 $\tilde{X}=FX$,于是 C 是对称矩阵,还有

$$X^TCX = X^TF^TFX = \tilde{X}^T\tilde{X}$$

若 $\tilde{X}\neq 0$,则 $\tilde{X}^T\tilde{X}>0$,于是有 $X^TCX>0$,C 是正定的,其本征值都是正数,并用 λ_i^2 表示,取 $\lambda_i>0$。若 C 的正规化本征矢量为 $X^{(i)}$,取 $P^T=(X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(n)})$,则 P 是正定矩阵。并有

$$PCP^T = \mathrm{diag}(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2)$$

定义

$$U = P^T\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)P$$

则

$$X^TUX = (PX)^T\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)PX$$

因为 P 是正定列阵,故上式大于零,即 $X^TUX>0$,可见 U 是正定矩阵。

$$\begin{aligned}U^2 &= P^T\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)PP^T\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)P\\ &= P^T\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2)P = C\end{aligned}$$

由定义 $U=P^T\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)P$,$\lambda_i>0$ 且 P 为正交列阵,故 U 为非奇异矩阵。

再定义 $R=FU^{-1}$。要证明式(2.38)中第一式的存在,只要证明 R 是正交的即可。

$$R^TR = U^{-1}F^TFU^{-1} = U^{-1}CU^{-1} = U^{-1}U^2U^{-1} = I$$

所以 R 确定是正交矩阵。

又定义 $V=RUR^T$,同理可证 V 是正定的,并有 $F=VR$。

惟一性

假设存在另一分解 $F=R_1U_1$,其中 R_1 是正交的,而 U_1 是正定的。于是

$$U_1^2 = U_1^TU_1 = (R_1^TF)^TR_1^TF = F^TR_1R_1^TF = F^TF = C$$

且

$$PU_1^2P^T = (PU_1P^T)(PU_1P^T) = \mathrm{diag}(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2)$$

所以

$$\begin{aligned}PU_1P^T &= \mathrm{diag}(\pm\lambda_1,\pm\lambda_2,\cdots,\pm\lambda_n)\\ U_1 &= P^T\mathrm{diag}(\pm\lambda_1,\pm\lambda_2,\cdots,\pm\lambda_n)P\\ X^TU_1X &= X^TP^T\mathrm{diag}(\pm\lambda_1,\pm\lambda_2,\cdots,\pm\lambda_n)PX\\ &= \xi^T\mathrm{diag}(\pm\lambda_1,\pm\lambda_2,\cdots,\pm\lambda_n)\xi\\ &= \pm\lambda_1\xi_1^2\pm\lambda_2\xi_2^2\pm\cdots\pm\lambda_n\xi_n^2\end{aligned}$$

这些 U_1 中只有都取正号的那个是正定的,因此 $U_1=U$。

由定义 $R=FU^{-1}$,这里 $R_1=FU_1^{-1}=FU^{-1}=R$;由定义 $V=RUR^T$,这里 $V_1=R_1U_1R_1^T=RUR^T=V$;故 $F=RU$ 及 $F=VR$ 是惟一的。

习　题

2.1 如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-3&-2\\1&-5\\4&3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\\t&u\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$。

2.2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\5&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&2&5\\2&0&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}4&1&2\\0&3&2\\1&-2&3\end{pmatrix}$，计算：(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；(2) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}$；(3) $-2\boldsymbol{A}$。

2.3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^3$。

2.4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-3&2&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\1&2&3\end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$。

2.5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-1&2&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0\\1&2\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&-2&1+\mathrm{i}\end{pmatrix}$，计算：(1) $\boldsymbol{AB}$；(2) $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$。

2.6 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\2&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}&1&0\\-1&2-\mathrm{i}&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-1&3\\1&-1\end{pmatrix}$，计算：(1) $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$；(2) $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$；(3) $\boldsymbol{AC}$；(4) $\boldsymbol{CA}$。

2.7 求下列算式中的矩阵 $\boldsymbol{X}$。

(1) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&-1&2\end{pmatrix}+\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&-2&-1\end{pmatrix}$

(2) $2\begin{pmatrix}3&-1&1\\-2&0&2\end{pmatrix}-3\boldsymbol{X}+\begin{pmatrix}-2&-1&1\\3&1&-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$

2.8 求矩阵 $\boldsymbol{X}$，使得 $2\boldsymbol{X}+\begin{pmatrix}3&-1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0\\1&2\end{pmatrix}$。

2.9 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p}$，$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times p}$，试证 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$。

2.10 对于两个矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，求使得 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 成立的条件。

2.11 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p}$，$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{p\times q}$，试证 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$。

2.12 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times p$ 矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 $r\times q$ 矩阵。问：p,q,r 应满足什么条件才能进行下列运算？运算结果的阶次是多少？(1)$\boldsymbol{ABC}$；(2)$\boldsymbol{ACB}$；(3)$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$。

2.13 试证方阵可惟一地表示为对称矩阵与反对称矩阵之和。

2.14 将 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}$ 表示为对称矩阵与反对称矩阵之和。

2.15 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的列矢量为 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，试用 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 表示 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$。

2.16 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行矢量为 $\boldsymbol{a}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{a}^{(n)}$，试用 $\boldsymbol{a}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{a}^{(n)}$ 表示 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 成立的条件。

2.17 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵时，试证 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ 为对称矩阵，$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 为反对称矩阵。

2.18 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为反对称矩阵，求 $\boldsymbol{AB}$ 为反对称矩阵的条件。

2.19 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，定义矩阵的迹 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$，求证 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}+\mathrm{tr}\boldsymbol{B}$。

2.20 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，求证 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$。

2.21 如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}$，试证 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是幂等矩阵(即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$)。

2.22 如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}$，试证：(1) $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；(2) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 都是幂等矩阵；(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 有逆阵存在，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$。

2.23 试证 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}$ 为三阶幂零矩阵(即 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}$)。

2.24 若 $\boldsymbol{A}$ 为二阶幂零矩阵，试证 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}\pm\boldsymbol{A})^n=\boldsymbol{A}$，$n$ 为任意正整数。

2.25 试证 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$。

2.26 若 $\boldsymbol{A}$ 为有逆阵的 n 阶方阵，试证：(1) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$；(2) $(\bar{\boldsymbol{A}})^{-1}=\overline{\boldsymbol{A}^{-1}}$；(3) $(\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}})^{-1}=\overline{(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}}$。

2.27 计算 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

2.28 计算下述矩阵的逆矩阵。

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$；(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$。

2.29 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可交换的非奇异矩阵，试证下述矩阵是可交换的。(1) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}$；(2) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$。

2.30 若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是非奇异对称矩阵，且可交换，试证：$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$与$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$是对称的。

2.31 试证当且仅当$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对合矩阵(即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$)。

2.32 若 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，$\boldsymbol{B}=r\boldsymbol{A}+s\boldsymbol{I}$，$r$，$s$ 为标量，试证 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的。

2.33 若 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，试证：(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是对称的；(2) $\boldsymbol{A}+\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$，$\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是埃尔米特矩阵。

2.34 若 $\boldsymbol{H}$ 是埃尔米特矩阵，$\boldsymbol{A}$ 是适合于下列运算的任何矩阵，试证$(\overline{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}$ 是埃尔米特矩阵。

2.35 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，试证 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是对称的。

2.36 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶对称方阵，试证当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换时，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是对称的。

2.37 试证：若 m 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称的(反对称的)，$\boldsymbol{P}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 是对称的(反对称的)。

2.38 若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，试证当且仅当 $\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{B}-k\boldsymbol{I}$($k$ 为标量)时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的。

2.39 试证 $\boldsymbol{P}$ 为非奇异矩阵时，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的本征多项式相同。

2.40 试证 n 阶实对称方阵的本征值都是实数。

2.41 用正交矩阵将 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$化为对角矩阵。

2.42 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}7 & -2 & 1\\ -2 & 10 & -2\\ 1 & -2 & 7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$，$\lambda_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的本征值，求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$。

2.43 求下列矩阵的本征值与本征矢量。

(1) $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}$。

2.44 求下列矩阵的本征值与本征矢量。

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$。

2.45 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的不变矢量，试证 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$\lambda_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的本征值。

2.46 将 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$化为对角矩阵。

2.47 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，试证

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}) = -\lambda^3 + \mathrm{tr}\boldsymbol{A}\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{adj}\boldsymbol{A})\lambda + \det\boldsymbol{A}$$

2.48 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，计算

$$(\boldsymbol{A}^4 - 3\boldsymbol{A}^3 - 4\boldsymbol{A}^2 + 22\boldsymbol{A} - 6\boldsymbol{I})^{-1}$$

2.49 试证：$\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵，若 λ 为本征值，则 $-\lambda$ 也是本征值。

2.50 试证：$\boldsymbol{A}$ 为三阶正交矩阵，且 $\det\boldsymbol{A}=1$ 时，具有本征值 1；其次，如果 -1 是本征值，则它是本征方程的重根。

2.51 试证方阵 $\boldsymbol{A}$ 可惟一地表示为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\mathrm{i}\boldsymbol{C}$（$\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为埃尔米特矩阵）。再将 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 2 & 3-\mathrm{i} \end{pmatrix}$ 表示成 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\mathrm{i}\boldsymbol{C}$ 的形式。

2.52 对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 以及非零的 n 维行矢量 $\boldsymbol{x}$，试证满足 $\boldsymbol{xA}=\lambda\boldsymbol{x}$ 的数 λ 不外是 $\boldsymbol{A}$ 的本征值，称矢量 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的左本征矢量；而满足 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$ 的 $\boldsymbol{x}$ 叫做右本征矢量。只说本征矢量时，指的是右本征矢量。

2.53 试证：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为奇异阵时，$\boldsymbol{A}$ 具有本征值 0；反之，若 $\boldsymbol{A}$ 具有本征值 0，则 $\boldsymbol{A}$ 是奇异阵。

2.54 试证：$\boldsymbol{A}$ 为非奇异阵时，$\boldsymbol{A}$ 的本征矢量是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的本征矢量。$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的本征值是什么？

2.55 证明与 $\boldsymbol{A}$ 的本征值中相异的本征值所对应的本征矢量是线性无关的。

2.56 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有相异的 n 个本征值。证明：若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的本征矢量为 $\boldsymbol{B}$ 的本征矢量。

2.57 求矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2c \end{pmatrix}$ 是正交矩阵的条件。

2.58 由矢量 $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 作出正规正交系。

2.59 求与矢量 $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ i \end{pmatrix}$ 都正交，且大小为 1 的矢量。

2.60 求与矢量 $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 都正交，且大小为 1 的矢量。

2.61 用适当的酉矩阵使矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 成为对角矩阵。

2.62 用适当的酉矩阵使矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$成为对角矩阵。

2.63 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,计算$\boldsymbol{A}^n$($n$是正整数)。

2.64 计算:(1)$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n$;(2)$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n$。

2.65 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$,用凯莱-哈密顿定理求$\boldsymbol{A}^3,\boldsymbol{A}^4$。设$\boldsymbol{A}$为非奇异矩阵,求$\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^{-2}$。

第3章 张量概念

物理学定律不应该依赖于研究者为了描述某一物理现象所选择的坐标系。张量分析的主要目的正是给人们提供一种数学工具,它可以满足描述物理学定律与坐标系的选择无关性。张量概念首先讲述坐标变换、指标与爱因斯坦求和约定、克罗内克(Kronecker)δ 符号、排列符号,然后讲逆变、协变矢量。二阶张量的概念及其坐标变换律是本章的重点。最后介绍了高阶张量和对称与反(逆)对称张量。

3.1 引言

物理学定律不可能依赖于研究者为了描述某一物理现象所选择的坐标系。张量分析的主要目的正是给人们提供一种数学工具,它可以满足一切物理学定律的重要特性,即它与坐标系的选择无关。如果在一些特殊的坐标系中,例如直角坐标系、柱面坐标系或球面坐标系等,写出的物理方程,其形式都不一样,这样不但演算麻烦,而且容易混淆物理问题的本质。但是如果采用张量表达形式,则这些方程不论在什么坐标系中都具有相同的形式。因此,当人们用张量分析来讨论问题时,只要证明列示的方程在一个选定的坐标系里是正确的,则它在所有的坐标系里也都是正确的,也就是说无须再在每个坐标系里去验证。对于同样的一个物理学问题,用张量形式写出的方程与用其他数学形式写出的方程相比,不仅本质上具有普遍性,而且由于符号的对称与简洁,使得方程精练而完美。

张量概念起源于高斯(Gauss)、黎曼(Riemann)和克里斯托费尔(Christoffel)等建

立的微分几何学。张量分析及演算或绝对微分学，是由里奇(Ricci)和他的学生列维-奇维塔(Levi-Civita)的共同研究成果而形成的数学的一个分支。自从爱因斯坦(Einstein)在 1915 年发表了关于广义相对论的著名论文以后，张量分析引起了物理学家的关注。近年来，许多力学问题的研究工作中，张量分析也起着重要的作用。现在，如果物理学工作者或力学工作者对张量分析没有一定程度的通晓，将会严重影响研究工作。

3.2 N 维空间与坐标变换

1. N 维空间

在三维空间里，一个点由三个变量(例如 $x,y,z;\rho,\varphi,z$ 或 γ,θ,φ 等)所确定，这组变量称为点的坐标。或者说三个变量 x^1,x^2,x^3 的集合称为一点，这些点则形成一个三维空间。

N 个变量 $x^1,x^2,\cdots,x^N$ 的集合也称为一点(在以下的章节里，上标 $1,2,\cdots,i,\cdots,N$ 只作标号使用，没有任何乘幂指数的意义，为了区别，x^i 的平方用 $(x^i)^2$ 表示)，所有各点形成一 N 维空间，用 V_N 表示。

定义 N 维空间里的曲线为满足下列 N 个方程的点的轨迹：

$$x^i = x^i(u), \quad i = 1,2,\cdots,N \tag{3.1}$$

式中，u 是参数，而 x^i 是 u 的 N 个满足一定连续条件的函数，通常只要存在所需的各阶导数就够了。

定义 N 维空间的子空间 $V_M(M<N)$ 为满足下列 N 个方程的点集合：

$$x^i = x^i(u^1,u^2,\cdots,u^M), \quad i = 1,2,\cdots,N \tag{3.2}$$

式中有 M 个参数 $u^1,u^2,\cdots,u^M$。$x^i(u^1,u^2,\cdots,u^M)$是 $u^1,u^2,\cdots,u^M$ 的 N 个满足一定连续条件的函数。设 $M=N-1$，则子空间称为**超曲面**。

2. 坐标变换

设$(x^1,x^2,\cdots,x^N)$与$(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\cdots,\bar{x}^N)$是一个点在两个不同的坐标系中的坐标，并设两组坐标之间存在着 N 个独立的关系式：

$$\begin{aligned}
\bar{x}^1 &= \bar{x}^1(x^1,x^2,\cdots,x^N)\\
\bar{x}^2 &= \bar{x}^2(x^1,x^2,\cdots,x^N)\\
&\vdots\\
\bar{x}^N &= \bar{x}^N(x^1,x^2,\cdots,x^N)
\end{aligned}$$

简写为

$$\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^1,x^2,\cdots,x^N), \quad k = 1,2,\cdots,N \tag{3.3}$$

式中，$\bar{x}^i$ 是 x^i 的单值连续可导函数。N 个 $\bar{x}^i$ 函数无关的必要与充分条件是 $\partial\bar{x}^i/\partial x^j$ 组成的雅可比行列式不等于零，即

$$J = \det\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} \neq 0$$

在这个条件下，由式(3.3)可解得

$$x^k = x^k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots, \bar{x}^N), \quad k = 1,2,\cdots,N \tag{3.4}$$

定义式(3.3)、式(3.4)为从一个坐标系到另一个坐标系的坐标变换。式(3.4)是式(3.3)的惟一的逆变换。

3.3 指标与排列符号

1. 指标与求和约定

引入以下两项约定：

(1) 除了作特殊的说明外，用作上标或下标的拉丁字母指标，都将取从 1 到 N 的值。

(2) 若一项中有一个指标重复，就意味着要对这个指标遍历范围 $1,2,\cdots,N$ 求和。这就是爱因斯坦求和约定。

根据以上的约定，

$$a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N = \sum_{i=1}^{N} a_ix^i$$

可简写为 a_ix^i。据以求和的指标称为哑指标。一个哑指标可以用任何其他哑指标代替，例如 $a_ix^i = a_jx^j$。在应用求和约定时，一定要保证任何式子里不许出现两次以上的指标，否则式子的意义就不明确了。

式(3.3)、式(3.4)中的指标 k 的取值是从 1 到 N，但没有求和的意义，成为自由指标。

例如，两矩阵相乘 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{C}$ 的元素

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

应用求和约定，等式右边可简写为 $a_{ik}b_{kj}$。

三矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 相乘后第 i 行第 l 列的元素可写为 $a_{ij}b_{jk}c_{kl}$。

又如式(3.3)的微分是

$$\mathrm{d}\bar{x}^i = \sum_{p=1}^{N} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\mathrm{d}x^p, \quad i = 1,2,\cdots,N$$

应用求和约定,可写成 $\mathrm{d}\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\mathrm{d}x^p$。

2. 克罗内克 δ 符号

定义 克罗内克 δ 是

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{3.5}$$

如果不分上下标,克罗内克符号也可写成 δ_{ij}。

由定义显然有

$$\delta_{im}A_m = A_i, \quad \delta^k_j A^j = A^k \tag{3.6}$$

$$\delta_{ij}A_{jk} = A_{ik}, \quad \delta_{ij}A_{kj} = A_{ki} \tag{3.7}$$

在三维空间里

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

δ_{ij} 的矩阵是单位矩阵,即

$$(\delta_{ij}) = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I} \tag{3.8}$$

此外,对正交的单位矢量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$,有 $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$。

弧元的平方

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + \cdots + (\mathrm{d}x_n)^2$$

可写为

$$(\mathrm{d}s)^2 = \delta_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$$

3. 排列符号(permutation symbols)

定义 排列符号(又称交错符号)是

$$\in_{ijk} = \begin{cases} 1, & i,j,k \text{ 成偶排列} \\ -1, & i,j,k \text{ 成奇排列} \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases} \tag{3.9}$$

关于 i,j,k 的排列这里作一说明。如果将 1,2,3 中的任意一对互换位置,称为一次置换,再互换一对就称为二次置换。如 123→132→312 就是二次置换。如此类推可得三、四等次置换。由偶次置换得到的排列称为偶排列,例如,123,231,312 为

偶排列。显然，奇排列对应于奇次置换，如 132，321，213。或者说，偶排列是指把 i，j，k 排列在圆周上，i，j，k 的置换按逆时针方向转动；奇排列则是按顺时针方向转动。其他排列是指 i，j，k 中出现重复，如 121，222 等。

由定义可知，$\in_{ijk}$ 具有如下的对称性：

$$\in_{ijk} = \in_{jki} = \in_{kij} = -\in_{kji} = -\in_{ikj} = -\in_{jik} \tag{3.10}$$

根据行列式的性质及 $\in_{ijk}$ 的定义，可以证明 3×3 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式可表示为

$$\det\boldsymbol{A} = \frac{1}{6}\in_{ijk}\in_{rst}a_{ir}a_{js}a_{kt} \tag{3.11}$$

在右手正交坐标系里，

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3\,,\ \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1\,,\ \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$$

故有

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \in_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{3.12}$$

若

$$\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i\,,\ \boldsymbol{b} = b_j\boldsymbol{e}_j$$

则

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_i\boldsymbol{e}_i) \times (b_j\boldsymbol{e}_j) = a_ib_j(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) = a_ib_j\in_{ijk}\boldsymbol{e}_k$$

即

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \in_{ijk}a_ib_j\boldsymbol{e}_k \tag{3.13}$$

容易证明

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_ib_j\delta_{ij} \tag{3.14}$$

克罗内克符号与排列符号之间的一个重要关系是

$$\in_{ijk}\in_{ist} = \delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks} \tag{3.15}$$

3.4 逆变矢量与协变矢量

1. 矢量的两组分量

由矢量的平行四边形法则，可以将矢量 $\boldsymbol{a}$ 在两坐标轴夹角为 θ 的 1-2 坐标系中分解为 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 代表的两个分量。如图 3.1 所示，该 1、2 两坐标轴的基矢量分别为 $\boldsymbol{g}_1$、$\boldsymbol{g}_2$，a^1、a^2 分别为 $\boldsymbol{a}$ 沿 1、2 坐标轴的分量。

由

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

则

$$\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{g}_1 + a^2\boldsymbol{g}_2 = a^i\boldsymbol{g}_i \tag{3.16}$$

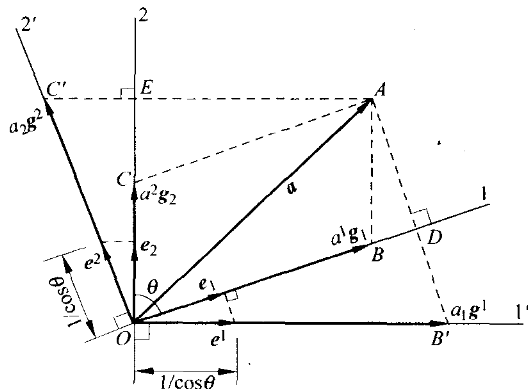


图 3.1

式中，带上标的分量 a^1，a^2 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的逆变分量。

过原点 O 作坐标系 1'-2'，使轴 1'垂直于轴 2，轴 2'垂直于轴 1。矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 1，2 轴的投影分别为 AD，AE，延长 AD，AE，分别交轴 1'、轴 2'于 B'、C'。于是

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$$

设 $\boldsymbol{g}^1$，$\boldsymbol{g}^2$ 分别为 1'，2'轴的基矢量（注意：不是单位矢量。因为若 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 为单位矢量，则 $\boldsymbol{g}^1$，$\boldsymbol{g}^2$ 的绝对值为 $1/\cos\theta$，见图 3.1），a_1、a_2 分别为矢量 $\boldsymbol{a}$ 沿轴 1'、轴 2'的分量，则

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{g}^1 + a_2\boldsymbol{g}^2 = a_j\boldsymbol{g}^j \tag{3.17}$$

式中，带下标的分量 a_1，a_2 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的协变分量。因一般情况下 $|\boldsymbol{g}^j|\neq 1$，所以协变分量 a_j 并不就是分矢量 $a_j\boldsymbol{g}^j$（不求和）的大小。

以上阐述的三维空间的概念，不难推广到多维的情况。

考虑任意两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，将 $\boldsymbol{a}$ 分解成逆变分量，$\boldsymbol{b}$ 分解成协变分量，即

$$\boldsymbol{a} = a^i\boldsymbol{g}_i, \quad \boldsymbol{b} = b_j\boldsymbol{g}^j$$

选择基矢，使它们满足条件 $\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_j = \delta^i_j$，则

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a^i\boldsymbol{g}_i \cdot a_j\boldsymbol{g}^j = a^ib_j\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j = a^ib_j\delta^i_j = a^ib_i$$

上式表明，如果一个矢量采用逆变分量，而另一个矢量采用协变分量，则在斜角直线坐标系中，两个矢量点乘的公式也同式(1.18)一样简单。

2. 矢量的逆变分量

设老坐标系的基矢为 $\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$，…，$\boldsymbol{g}_N$，新坐标系的基矢为 $\bar{\boldsymbol{g}}_1$，$\bar{\boldsymbol{g}}_2$，…，$\bar{\boldsymbol{g}}_N$，两组坐标以相互单值变换关系相关联，即

$$\bar{\boldsymbol{g}}_j = M_{jk}\boldsymbol{g}_k \tag{3.18}$$

$$\boldsymbol{g}_i = M_{li}\bar{\boldsymbol{g}}_l \tag{3.19}$$

两式互代得

$$\bar{\boldsymbol{g}}_j = M_{jk}M_{lk}\bar{\boldsymbol{e}}_l, \quad \boldsymbol{g}_i = M_{lk}M_{li}\boldsymbol{e}_k$$

因为两组基矢量都具有线性独立性，所以

$$M_{jk}M_{lk} = \delta_j^l, \quad M_{lk}M_{li} = \delta_i^k \tag{3.20}$$

由式(3.16)有

$$\boldsymbol{a} = a^j\boldsymbol{g}_j = \bar{a}^i\bar{\boldsymbol{g}}_i$$

将式(3.19)代入上式得

$$a^jM_{ij}\bar{\boldsymbol{e}}_i = \bar{a}^i\bar{\boldsymbol{e}}_i$$

所以有

$$\bar{a}^i = M_{ij}a^j \tag{3.21a}$$

或写成

$$\bar{A}^i = M_{ij}A^j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}A^j \tag{3.21b}$$

它们是一矢量的逆变分量。服从式(3.21b)变换律的任一量 A^i 简称为**逆变矢量**。

在式(3.21b)两边同乘以$\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}$，并对指标 i 遍历 1 到 N 求和，得

$$\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\bar{A}^i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}A^j = \frac{\partial x^k}{\partial x^j}A^j = \delta_j^kA^j = A^k$$

因此，方程组(3.21b)的解是

$$A^k = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\bar{A}^i \tag{3.22}$$

例如，x^i 的全微分是一逆变矢量，因为

$$\mathrm{d}\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j \tag{3.23}$$

即这个逆变矢量在任何其他坐标系里的分量就是那个坐标系里的全微分 $\mathrm{d}\bar{x}^i$。可以看出，$\mathrm{d}\bar{x}^i$ 是 $\mathrm{d}x^j$ 的线性齐次式，并且也是 $M_{ij}\left(=\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right)$的代数齐次式。

现在考虑又一次坐标变换 $x'^i = x'^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots, \bar{x}^N)$，于是新分量 A'^i 必由下列方程确定：

$$A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial \bar{x}^j}\bar{A}^j = \frac{\partial x'^i}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}A^k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}A^k \tag{3.24}$$

这个方程同式(3.21)的形式一样。

例 3.1 试证逆变矢量的变换形成一群。

证 逆变矢量的变换$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$组成的集合 G 中，在原坐标系中的变换$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$ 为 G 中

的单位元；$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$的逆是$\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}$，且$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}=\delta^i_k$；由式(3.24)知道，可以写出变换 $\overset{1}{M}_{ij}=\frac{\partial \overset{1}{x}^i}{\partial x^j}$，$\overset{2}{M}_{rs}=\frac{\partial \overset{2}{x}^r}{\partial x^s}$，$\overset{3}{M}_{pq}=\frac{\partial \overset{3}{x}^p}{\partial x^q}$等，$\overset{1}{M}_{ij}$，$\overset{2}{M}_{rs}$，$\overset{3}{M}_{pq}$的乘积显然与其次序无关，$\overset{1}{M}_{ij}(\overset{2}{M}_{rs}\overset{3}{M}_{pq})=(\overset{1}{M}_{ij}\overset{2}{M}_{rs})\overset{3}{M}_{pq}$，即乘法满足结合律，可见逆变矢量的变换形成一群。

今后除了特别说明外，单个上标总是表示逆变标记，但坐标 x^i 本身是例外，只有对形式为 $\bar{x}^i=M_{ij}x^j$ 的线性变换，坐标 x^i 才表现为逆变矢量的分量。

3. 协变矢量

由式(3.17)有

$$\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{g}^i$$

用式(3.19)两边与上式两边点乘，即

$$\boldsymbol{a}\cdot M_{lj}\bar{\boldsymbol{g}}_l=a_i\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_j=a_i\delta^i_j=a_j$$

因

$$\boldsymbol{a}\cdot\bar{\boldsymbol{g}}_l=\bar{a}_l$$

所以

$$a_j=M_{lj}\bar{a}_l$$

利用式(3.20)可得

$$M_{ij}a_j=M_{ij}M_{lj}\bar{a}_l$$

于是有

$$\bar{a}_i=M_{ij}a_j \tag{3.25a}$$

或写成

$$\bar{A}_i=\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}A_j \tag{3.25b}$$

它们是一矢量的协变分量。服从式(3.25b)变换律的任一量 A_i 简称为协变矢量。

将式(3.25b)乘以$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}$，并对指标 i 遍历 1 到 N 求和，得

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\bar{A}_i=\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}A_j=\frac{\partial x^j}{\partial x^k}A_j=\delta^j_kA_j=A_k$$

即

$$A_k=\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\bar{A}_i \tag{3.26}$$

例如，标量 Φ 的梯度 gradΦ 是协变矢量，因为$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}^i}=\frac{\partial \Phi}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}$符合式(3.25b)变换律。

除特别说明外，单个下标总表示协变标记。为了同这个约定相一致，可把协变矢量$\partial\Phi/\partial x^i$中的指标$i$当作下标。

现在证明，如果限于如下类型的变换：

$$\bar{x}^i = M_{im}x^m + b^i \tag{3.27}$$

式中，b^i为N个常量，这些常量不一定形成逆变矢量的分量，而M_{im}为满足下列关系的常量（不一定形成张量）：

$$M_{ir}M_{im} = \delta^r_m$$

则逆变矢量与协变矢量无区别。

将式（3.27）乘以M_{ir}，并对指标i遍历1到N求和，得

$$x_r = M_{ir}\bar{x}^i - M_{ir}b^i$$

因此

$$\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^i} = M_{ij}$$

这说明式（3.21b）与式（3.25）所定义的是同类型的量。

4. 矢量的解析定义

由三个分量所确定的物理量或几何量，当坐标变换时，这些分量按照式（3.21）和式（3.22）或式（3.25b）和式（3.26）变换律而变换，这个物理量或几何量称为矢量。这就是矢量的解析定义。

矢量在某一特殊坐标系中如被确定，则矢量在任一坐标系中都可求得。

矢量分量的变换公式对于矢量分量是线性的，又是齐次的。因此，特别是在某一坐标系中等于零的矢量，它在一切坐标系中都等于零。

最后指出：坐标变换公式是从矢量的分解式（3.16）、式（3.17）中推导出来的。所以矢量分量的变换律是矢量加法运算的推论。因此，矢量的几何定义（矢量是可用有向直线线段表示且符合平行四边形加法的量）与矢量的解析定义是等价的。

3.5 不变量

设Φ是N个坐标x^i的函数，如果对于坐标变换有$\Phi=\bar{\Phi}$，式中$\bar{\Phi}$是Φ在新坐标系$\bar{x}^i$中的值，则称Φ为不变量或标量。

例如，u^k与v_k分别为逆变矢量与协变矢量，两个矢量u^k，v_k的内积（或标量积）$u^k v_k$是一个绝对不变量，因为

$$\bar{u}^k\,\bar{v}_k = \frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^l}u^l\,\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^k}v_l = u^l v_l = u^k v_k$$

另一个不变量是

$$\delta_i^i = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_N^N = N$$

3.6 二阶张量

(1) 设有 N^2 个函数 A^{ij}，其坐标变换律为

$$\bar{A}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} A^{kl} \tag{3.28}$$

则称 A^{ij} 为二阶逆变张量的分量。任何 N^2 个函数的集都可以选作二阶逆变张量的分量，所以式(3.28)定义了该张量在任何其他坐标系 $\bar{x}^i$ 中的分量。

(2) 设有 N^2 个函数 A_{ij}，其坐标变换律为

$$\bar{A}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} A_{kl} \tag{3.29}$$

则称 A_{ij} 为二阶协变张量的分量。

(3) 设有 N^2 个函数 A_j^i，其坐标变换律为

$$\bar{A}_j^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} A_l^k \tag{3.30}$$

则称 A_j^i 为二阶混合张量的分量。

注意，表示逆变的指标应作为张量的上标，而表示协变的指标应作为张量的下标。混合张量 A_j^i 对于指标 i 是像逆变矢量一样作坐标变换的，而对于指标 j 又应像协变矢量一样进行坐标变换，因此将 i 写作上标，而将 j 写作下标。

例 3.2 设一协变张量在笛卡儿直角坐标系中的分量为 $xy, 2y-z^2, xz$。试求它在球面坐标系中的协变分量。

解 设 A_j 表示张量在笛卡儿直角坐标系 $x^1=x, x^2=y, x^3=z$ 中的协变分量，则

$$A_1 = xy = x^1x^2, \quad A_2 = 2y - z^2 = 2x^2 - (x^3)^2, \quad A_3 = x^1x^3$$

令 $\bar{A}_k$ 表示张量在球面坐标系 $\bar{x}^1=r, \bar{x}^2=\theta, \bar{x}^3=\varphi$ 中的协变分量，由于协变张量的变换律是

$$\bar{A}_k = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} A_j \tag{a}$$

而两组坐标系之间的关系是

$$\begin{aligned} x^1 &= \bar{x}^1 \sin\bar{x}^2 \cos\bar{x}^3 \\ x^2 &= \bar{x}^1 \sin\bar{x}^2 \sin\bar{x}^3 \\ x^3 &= \bar{x}^1 \cos\bar{x}^2 \end{aligned}$$

故由坐标变换关系式(a)可得

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_1 &= \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1}A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1}A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1}A_3 \\
&= (\sin\bar{x}^2\cos\bar{x}^3)(x^1x^2) + (\sin\bar{x}^2\sin\bar{x}^3)(2x^2 - (x^3)^2) \\
&\quad + (\cos\bar{x}^2)(x^1x^3) \\
&= (\sin\theta\cos\varphi)(r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi) \\
&\quad + (\sin\theta\sin\varphi)(2r\sin\theta\sin\varphi - r^2\cos^2\theta) \\
&\quad + (-r\sin\theta)(r^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi) \\
\bar{A}_2 &= \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2}A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2}A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2}A_3 \\
&= (r\cos\theta\cos\varphi)(r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi) \\
&\quad + (r\cos\theta\sin\varphi)(2r\sin\theta\sin\varphi - r^2\cos^2\theta) \\
&\quad + (-r\sin\theta)(r^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi) \\
\bar{A}_3 &= \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3}A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3}A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3}A_3 \\
&= (-r\sin\theta\sin\varphi)(r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi) \\
&\quad + (r\sin\theta\cos\varphi)(2r\sin\theta\sin\varphi - r^2\cos^2\theta) \\
&\quad + (0)(r^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi)
\end{aligned}
$$

例 3.3 试证克罗内克符号 δ^i_j 是二阶混合张量。

证 由式(3.30)有

$$
\bar{\delta}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\delta^k_l = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j} = \delta^i_j
$$

可见 δ^i_j 是二阶混合张量。

3.7 高阶张量

1. 高阶张量的一般形式

一般把阶数高于四阶的张量称为高阶张量。当坐标从 x^i 变换到 $\bar{x}^i$ 时，设 N 个坐标 x^i 的 N^{p+q} 个函数 $A^{k_1k_2\cdots k_p}_{\cdots l_1l_2\cdots l_q}$ 的集服从于下列坐标变换律：

$$
\bar{A}^{t_1t_2\cdots t_p}_{\cdots r_1r_2\cdots r_q} = \frac{\partial \bar{x}^{t_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{t_p}}{\partial x^{k_p}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial \bar{x}^{r_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_q}}{\partial \bar{x}^{r_q}}A^{k_1k_2\cdots k_p}_{\cdots l_1l_2\cdots l_q} \tag{3.31}
$$

则称 $A^{k_1k_2\cdots k_p}_{\cdots l_1l_2\cdots l_q}$ 为$(p+q)$阶混合张量。这个张量对于 p 个上标是逆变的，而对于 q 个下标则是协变的。它的变换实际上是式(3.28)与式(3.29)的一个组合。

2. 对称张量

二阶张量的两个逆变指标或两个协变指标能够互换且不改变原张量，称这个张

量为对称张量。高阶混合张量的两个逆变指标或两个协变指标互换且不改变原张量，称这个张量对于这对指标是对称的。例如，若 $A^{ij}_{\cdot\cdot rst} = A^{ji}_{\cdot\cdot rst}$，则 $A^{ij}_{\cdot\cdot rst}$ 对于指标 i,j 是对称的。

现在证明，设在某个坐标系里，一张量对于两个指标是对称的，则在任何其他坐标系里，该张量对于这对指标仍保持对称。

现对逆变张量 $A^{ij}=A^{ji}$ 进行证明，这样证明无损于普遍性。

由式(3.28)有

$$\overline{A}^{ij} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l}A^{kl} = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l}\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}A^{lk} = \overline{A}^{ji} \tag{3.32}$$

这正是要证明的。

如果两个指标中的一个表示逆变，而另一个表示协变，则对于此两指标，一般不定义对称性。但克罗内克符号是对于它的两个指标(一个上标与一个下标)具有对称性的混合张量，即 $\delta^i_j=\delta^j_i$。

借助于对称矩阵的概念可知，在 N 维空间里，二阶对称张量至多有 $\frac{1}{2}N(N+1)$ 个不同的分量。

3. 反(斜)对称张量

二阶张量的两个逆变指标或两个协变指标互换后，张量分量的大小都不变，正负号都互变了，称这个张量为反对称张量或斜对称张量。高阶混合张量互换两个逆变指标或两个协变指标后，张量分量的大小都不变，而正负号都互变了，则称这个张量对于这对指标是反对称的或斜对称的。可用类似于式(3.32)的方法证明反对称性质也不依赖于坐标系的选择。

如果两个指标中的一个表示逆变，而另一个表示协变，则像对称性一样，也不能对这样的两个指标定义其反对称性。

在 N 维空间里，二阶反对称张量 A^{ij} 至多有 $\frac{1}{2}N(N-1)$ 个不同的算术分量，因为所有的 A^{ii}(不求和)都是零。

从式(3.31)可得到一个重要推论：如果在某个坐标系里，张量的所有分量在某点都为零，则在任何坐标系里，它们在该点的所有分量也都为零。

4. 张量场

若在空间某区域内每点定义有同型的张量，则这些张量构成一张量场。一般说来，张量场中被考察的张量随位置(和时间)而变化。第5章将介绍对固定时刻研究张量场因位置而变化的情况，这将使我们从张量代数的领域进入到张量分析的领域。

习　题

3.1 用求和约定改写下列各式：

(1) $\mathrm{d}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1+\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial x^N}\mathrm{d}x^N$

(2) $\frac{\mathrm{d}\bar{x}^k}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^1}\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^2}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}+\cdots+\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^N}\frac{\mathrm{d}x^N}{\mathrm{d}t}$

(3) $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+\cdots+(x^N)^2$

(4) $\mathrm{d}s^2=g_{11}(\mathrm{d}x^1)^2+g_{22}(\mathrm{d}x^2)^2+g_{33}(\mathrm{d}x^3)^2$

(5) $\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}g_{pq}\mathrm{d}x^p\mathrm{d}x^q$

3.2 用求和约定改写下列各式：

(1) $a_1x^1x^3+a_2x^2x^3+\cdots+a_Nx^Nx^3$

(2) $A^{21}B_1+A^{22}B_2+A^{23}B_3+\cdots+A^{2N}B_N$

(3) $A_1^jB^1+A_2^jB^2+A_3^jB^3+\cdots+A_N^jB^N$

(4) $g^{21}g_{11}+g^{22}g_{21}+g^{23}g_{31}+g^{24}g_{41}$

(5) $B_{11}^{121}+B_{12}^{122}+B_{21}^{221}+B_{22}^{222}$

3.3 将下列用求和约定写成的表示式改写为多项求和的表示式：

(1) $a_{jk}x^k$；(2) $A_{pq}A^{qr}$；(3) $\bar{g}_{rs}=g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^s}$，$N=3$。

3.4 将下列用求和约定写成的表示式改写为多项求和的表示式：

(1) $\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k)$，$N=3$

(2) $A^{jk}B^{p}{}_{\cdot k}C_j$，$N=2$

(3) $\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^m}$

3.5 在直角坐标 x^k，$k=1,2,\cdots,N$ 中，下列方程当 $N=2,3$ 或 $N\geqslant4$ 时各表示什么轨迹？必要时，假设这些函数是单值、连续可导、独立的。

(1) $a_kx^k=1$，式中 k 为常量；(2) $x^kx^k=1$；(3) $x^k=x^k(u)$；(4) $x^k=x^k(u,v)$。

3.6 当 $N=2,3$ 或 4 时，方程 $a_kx^kx^k=1$ 表示什么轨迹？式中 x^k，$k=1,2,\cdots,N$ 是直角坐标，a_k 是非负常数。

3.7 在三维空间里，求下列含克罗内克符号 δ_{ij} 表示式的值。(1) $\delta_{ij}\delta_{ij}$；(2) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}$。

3.8 在三维空间里，求下列含克罗内克符号 δ_{ij} 表示式的值。(1) $\delta_{ij}\delta_{jk}$；

(2) $\delta_{ij}\delta_{ik}$。

3.9 计算：(1) $\delta^p_q A^{qr}_s$；(2) $\delta^p_q \delta^q_r$。

3.10 计算：(1) $\delta^p_q B^{rs}_p$；(2) $\delta^p_q \delta^r_s A^{qs}$；(3) $\delta^p_q \delta^q_r \delta^r_s$。

3.11 试证：在三维空间里，$\in_{ijk}\in_{kij}=6$。

3.12 试证：在三维空间里，$\in_{ijk} a_j a_k = 0$。

3.13 试证 $\in_{pqs}\in_{mnr} = \begin{vmatrix} \delta_{mp} & \delta_{mq} & \delta_{ms} \\ \delta_{np} & \delta_{nq} & \delta_{ns} \\ \delta_{rp} & \delta_{rq} & \delta_{rs} \end{vmatrix}$

3.14 设 $\det|A_{ij}|$ 是由第 i 行和第 j 列的元素 A_{ij} 所确定的行列式，试证 $\det|A_{ij}| = \in_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$。

3.15 试证 $\in_{pqs}\in_{snr} = \delta_{pn}\delta_{qr} - \delta_{pr}\delta_{qn}$。

3.16 试证 $\in_{pqs}\in_{sqr} = -2\delta_{pr}$。

3.17 用下标表示法证明：若 $\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}$，$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$，则有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$。

3.18 用下标表示法证明：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$。

3.19 证明 $\frac{\partial x^p}{\partial x^q} = \delta^p_q$。

3.20 证明 $\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^r} = \delta^p_r$。

3.21 写出下列张量的变换律：(1) A^i_{jk}；(2) B^{mn}_{ijk}；(3) C^m。

3.22 写出下列张量的变换律：(1) A^{ij}_k；(2) B^{ijk}_m；(3) C_{mn}；(4) A_n。

3.23 $A(j,k,l,m)$ 是坐标 x^i 的函数，它从坐标系 x^i 变换到坐标系 $\bar{x}^i$ 时符合以下的变换律：

$$\bar{A}(p,q,r,s) = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^k}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^l}\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^m} A(j,k,l,m)$$

试问 $A(j,k,l,m)$ 是不是张量？如是张量，写出张量的上、下指标，并说明其逆变与协变的阶数。

3.24 设 $\bar{B}(p,q,r) = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m} B(j,k,m)$，$\bar{C}(p,q,r,s) = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^n}\cdot C(j,k,m,n)$。问：哪一个是张量？写出张量的上、下指标，并说明其逆变与协变的阶数。

3.25 设一张量在笛卡儿直角坐标系里的协变分量为 $2x-z$，x^2y，yz。试求该张量在柱面坐标系 ρ,φ,z 中的协变分量。

3.26 试求题 3.25 中张量在球面坐标系 γ,θ,φ 中的协变分量。

3.27 试证：虽然 A_p 是一阶协变张量，但 $\frac{\partial A_p}{\partial x^q}$ 不是张量。

3.28　如果 Φ 是不变量，$\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^p \partial x^q}$ 是不是张量？

3.29　如果 $\bar{A}^{p}_{\cdot r} = \dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}\dfrac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r} A^{q}_{\cdot s}$，证明 $A^{q}_{\cdot s} = \dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p}\dfrac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}\bar{A}^{p}_{\cdot r}$。

3.30　设 $A^{pq}_{\cdot\cdot r}$ 是张量，试证 $A^{pr}_{\cdot\cdot r}$ 是一阶逆变张量。

3.31　设 B^i 与 C^j 是逆变矢量，A_{ij} 是协变张量，试证 $A_{ij}B^iC^j$ 是不变量。

3.32　设 A_{ij} 是反对称张量，试证 $(\delta^i_j\delta^k_l + \delta^i_l\delta^k_j)A_{ik} = 0$。

3.33　试证 $B_{ik} = \in_{ijk} a_j$ 是反对称张量。

3.34　在三维空间里，按以下方式展开，并尽可能化简 $D_{ij}x_ix_j$：(1) $D_{ij} = D_{ji}$；(2) $D_{ij} = -D_{ji}$。

第4章 张量代数

张量代数是本书的重点和核心章节。本章首先介绍了张量的加法、减法和乘法，其中包括张量的缩并和内乘。然后讲述了商定律是判断一组函数是否构成张量的简便验证方法。度量张量有逆变和协变两种类型，用度量张量装备的空间是度量空间。通过度量张量可以建立逆变矢量和协变矢量一一对应关系，其演算导致指标的升降。度量张量空间里的排列符号可以构成排列张量。用张量的矩阵记法可以看出张量的本征值和本征矢量等和矩阵中的对应演算很相似。二阶张量的主方向和不变量及其偏张量等概念和演算在力学和物理学中应用得非常广泛，读者应重点掌握。

4.1 张量的加法、减法与乘法

1. 和与差

凡张量中具有同数的协变指标与同数的逆变指标(即同阶的张量)者，都能相加或相减。

例如

$$C^{ij}_{\cdot\cdot k} = A^{ij}_{\cdot\cdot k} \pm B^{ij}_{\cdot\cdot k} \tag{4.1}$$

设 $A^{ij}_{\cdot\cdot k}$ 与 $B^{ij}_{\cdot\cdot k}$ 是张量，它们相加或相减，所得到的和或差仍是一个同阶的张量。证明如下。

根据 $A^{ij}_{\cdot\cdot k}$，$B^{ij}_{\cdot\cdot k}$ 是张量的假设，有

$$\overline{A}^{pq}_{\cdot\cdot r} = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^r}A^{ij}_{\cdot\cdot k}$$

$$\bar{B}^{pq}_{\cdot\cdot r} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} B^{ij}_{\cdot\cdot k}$$

相加，得

$$(\bar{A}^{pq}_{\cdot\cdot r} + \bar{B}^{pq}_{\cdot\cdot r}) = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} (A^{ij}_{\cdot\cdot k} + B^{ij}_{\cdot\cdot k})$$

即得和为

$$\bar{S}^{pq}_{\cdot\cdot r} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} S^{ij}_{\cdot\cdot k}$$

相减，得

$$(\bar{A}^{pq}_{\cdot\cdot r} - \bar{B}^{pq}_{\cdot\cdot r}) = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} (A^{ij}_{\cdot\cdot k} - B^{ij}_{\cdot\cdot k})$$

即得差为

$$\bar{D}^{pq}_{\cdot\cdot r} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} D^{ij}_{\cdot\cdot k}$$

显然，不能期望给表达式 $A^{ij} + B^{k}_{\cdot l}$ 以任何张量的意义，因为这样的演算不符合张量的变换律式(3.31)。然而，我们可以从式(3.31)知道，同类型张量的任何线性组合(其系数为不变量)是这一类型的张量。例如，两个张量 $A^{rs}_{\cdot\cdot t}$ 与 $B^{rs}_{\cdot\cdot t}$ 可以构成满足式(3.31)的张量 $\alpha A^{rs}_{\cdot\cdot t} + \beta B^{rs}_{\cdot\cdot t}$，只要 α 与 β 是不变量。

例 4.1 验证任一张量可以分解为对称与反对称两部分。

证 不失普遍性，以一个二阶逆变张量为例。

$$A^{pq} = \frac{1}{2}(A^{pq} + A^{qp}) + \frac{1}{2}(A^{pq} - A^{qp}) \tag{4.2}$$

而

$$R^{pq} = A^{pq} + A^{qp} = R^{pq}$$

是对称的，

$$S^{pq} = A^{pq} - A^{qp} = - S^{qp}$$

是反对称的，所以

$$A^{pq} = \frac{1}{2} R^{pq} + \frac{1}{2} S^{pq}$$

这个结论很容易推广到任何阶的张量。

2. 乘积

张量之间，不管其阶数是否相同，都能相乘。其乘积也是一个张量，积的阶数等于相乘因子的阶数之和。这样的乘法称为外乘，所得的乘积称为外积(outer product)。例如

$$A_{ik}^{\cdot\cdot j} = B_{ik} C^j \tag{4.3}$$

又如

$$T^{i\cdot\cdot jk}_{\cdot mn} = A^{i}_{\cdot m} B_n C^{jk} \tag{4.4}$$

注意，我们用了“.”表示上标或下标空缺的位置，习惯上最后的空位不加“.”。这样表示每一指标占有一个明确的竖列空间，今后可以看到，张量的指标次序是十分重要的。

实际上，张量

$$A^{\cdot\cdot j}_{ik} = B_{ik} C^{j} \text{ 与 } A^{j}_{\cdot ik} = C^{j} B_{ik}$$

是不相等的，因为指标的次序不同。可见，张量的乘法是不可交换的。

例 4.2 设 A^{pq}_{r} 与 B^{s}_{t} 是张量，证明 $C^{pq\cdot\cdot s}_{\cdot\cdot rt} = A^{pq}_{\cdot\cdot r} B^{s}_{\cdot t}$ 也是张量。

证

$$\bar{A}^{jk}_{\cdot\cdot l} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l} A^{pq}_{\cdot\cdot r}$$

$$\bar{B}^{m}_{\cdot n} = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^n} B^{s}_{\cdot t}$$

相乘，得

$$\bar{A}^{jk}_{\cdot\cdot l} \bar{B}^{m}_{\cdot n} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^n} A^{pq}_{\cdot\cdot r} B^{s}_{\cdot t}$$

可见，$A^{pq}_{\cdot\cdot r}$ 与 $B^{s}_{\cdot t}$ 的外积 $C^{pq\cdot\cdot s}_{\cdot\cdot rt}$ 是一个三阶逆变、二阶协变的五阶张量。

4.2 缩并与内乘

1. 缩并(contraction)

同一张量的某一上标与另一下标相同时，表示这个指标遍历 $1,2,\cdots,n$，再把这 n 项求和，这种演算过程称为缩并。设一个五阶混合张量 $A^{ij}_{\cdot\cdot lmn}$，令 $n=j$ 时，则 $A^{ij}_{\cdot\cdot lmj} = A^{i}_{\cdot lm}$ 是一个三阶张量。证明如下。

$$\begin{aligned}
\bar{A}^{sr}_{\cdot\cdot pqr} &= \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^j} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^r} A^{ij}_{\cdot\cdot lmn} \\
&= \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^q} \delta^n_j A^{ij}_{\cdot\cdot lmn} \\
&= \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^q} A^{ij}_{\cdot\cdot lmj}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

即成为

$$\bar{A}^{s\cdot\cdot}_{\cdot pq} = \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^q} A^{i\cdot\cdot}_{\cdot lm}$$

由上可见，上、下标相同，缩并一次所得的张量，其阶数比原来的降低二阶。

任何上、下标相同时便可缩并，因此可用缩并形成下列不同的张量：$A^{i\cdot\cdot j}_{\cdot lmj}=A^{i}_{\cdot lm}$，$A^{i\cdot j}_{\cdot ljn}=A^{i}_{\cdot ln}$，$A^{ij}_{\cdot jmn}=A^{i}_{\cdot mn}$，$A^{\cdot ij}_{li\cdot n}=A^{\cdot j}_{l\cdot n}$，$A^{ij}_{\cdot\cdot ijt}=A_{l}$，$A^{\cdot\cdot\cdot ij}_{nij}=A_{n}$，等等。特殊的例子是用缩并由混合张量 A^{i}_{j} 形成不变量 $A^{i}_{\cdot i}=\Phi$。可见称不变量是零阶张量是合理的。

2. 内乘

当两个张量相乘时，如果一个张量的某一上标与另一张量的某一下标相同，即表示就这个指标遍历 $1,2,\cdots,N$ 求和，这种演算称为两张量的内乘，得到的结果称为这两个张量的内积(inner product)，或称这两个张量的连并(transvection)。

例如：内乘的表达式

$$T^{ij}=\sum_{m,n=1}^{N}A^{\cdot\cdot i}_{mn}B^{mjn}$$

当然也可以表示为

$$T^{ij}=\sum_{k,l=1}^{N}A^{\cdot\cdot i}_{kl}B^{kjl}$$

因为哑标不论用什么字母，它所表示的意义都是一样的。

按照爱因斯坦求和约定，上式可以写为

$$T^{ij}=A^{\cdot\cdot i}_{mn}B^{mjn}\tag{4.6}$$

前面已讲过，外积(张量)的阶数等于相乘因子(张量)的阶数之和。如果相乘因子中有一对、两对、三对指标相同时，则内积的阶数应从相乘因子阶数总和中减去 2，4，6。以此类推。

两个矢量(一阶张量)的内积是标量(零阶张量)。例如

$$A=u^{k}v_{k}$$

应当指出，不要将同类型(上标或下标)的两个指标进行缩并或连并，因为得到的和不一定是张量。在我们的指标记法中，求和约定的两个指标总是一个上标与一个下标。

4.3 商 定 律

判断一组函数是否构成张量，直接的方法就是将这些函数从一个坐标系变换到另一个坐标系时，看它们是否符合像式(3.31)的张量变换方程。但是，实际上这样做有时是很麻烦的。下面的商定律提供了判断一组函数是否构成张量的一种较为简单的检验方法。

预定理　对于一个任意张量 $B^{qr}_{\cdot\cdot r}$ 和一组 27 个数 $X(p,q,r)$，有 $X(p,q,r)B^{qr}=0$ 时，则恒有 $X(p,q,r)=0$。

证 因 $B^{qn}_{\cdot\cdot r}$ 是一个任意张量，选择一个特殊的分量不等于零（譬如 $q=2,r=3$ 时），其他的分量都为零，则 $X(p,2,3)B^{2n}_{3}=0$。又因为 $B^{2n}_{3}\neq 0$，所以 $X(p,2,3)=0$。用同样的方法可对 q 与 r 的任何组合形式进行选择，将各种可能组合形式的结果进行综合，便可得 $X(p,q,r)=0$。

商定律 设 $B^{k_1\cdots k_p}_{\cdots l_1\cdots l_q}$ 是 p 阶逆变、q 阶协变的任意的混合张量，而 $X(k_1,\cdots,k_s,l_1,\cdots,l_t)$ 为被检定的一个数的集合（$s\geqslant q,t\geqslant p$），如果连并给出

$$X(k_1,\cdots,k_s,l_1,\cdots,l_t)B^{k_1\cdots k_p}_{\cdots l_1\cdots l_q}=C^{l_{q+1}\cdots l_s}_{\cdots k_{p+1}\cdots k_t} \tag{4.7}$$

而且所得的 C 为一 s-q 阶逆变、t-p 阶协变的混合张量，则量 X 必为 s 阶逆变、t 阶协变的混合张量。

证 不失一般性，且为简明起见，我们就下面的特殊情况进行证明。如果

$$A^{rst}B^{m}_{\cdot rs}=C^{mt} \tag{4.8}$$

其中 $B^{m}_{\cdot rs}$ 是一任意张量，C^{mt} 是张量，则 N^3 个函数 A^{rst} 的集形成一张量。这个张量的类型已由其指标表明。对于坐标系 $\bar{x}^i$，变换后的量应满足方程

$$\bar{A}^{rst}\bar{B}^{m}_{\cdot rs}=\bar{C}^{mt}$$

由式(3.31)可知

$$\bar{A}^{rst}\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^l}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^s}B^{l}_{\cdot pq}=\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^n}\frac{\partial\bar{x}^t}{\partial x^k}C^{nk}=\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^n}\frac{\partial\bar{x}^t}{\partial x^k}A^{rsk}B^{n}_{\cdot rs}$$

改变哑指标，有

$$\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^l}\left(\bar{A}^{rst}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^s}-A^{pqk}\frac{\partial\bar{x}^t}{\partial x^k}\right)B^{l}_{\cdot pq}=0$$

内乘以$\dfrac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^m}$，得

$$\delta^i_l\left(\bar{A}^{rst}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^s}-A^{pqk}\frac{\partial\bar{x}^t}{\partial x^k}\right)B^{l}_{\cdot pq}=0$$

$$\left(\bar{A}^{rst}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^s}-A^{pqk}\frac{\partial\bar{x}^t}{\partial x^k}\right)B^{i}_{\cdot pq}=0 \tag{4.9}$$

因为 $B^{i}_{\cdot pq}$ 是一任意张量，根据预定理可知

$$\bar{A}^{rst}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^s}=A^{pqk}\frac{\partial\bar{x}^t}{\partial x^k} \tag{4.10}$$

内乘以$\dfrac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}\dfrac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^q}$，得

$$\bar{A}^{rst}\delta^i_r\delta^j_s=A^{pqk}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial\bar{x}^t}{\partial x^k}$$

最后得

$$\bar{A}^{ijt}=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial\bar{x}^t}{\partial x^k}A^{pqk}$$

可见 A^{pqk} 是一个三阶逆变张量。

在上面的证明里，很重要的一点就是 $B^{l}_{\cdot pq}$ 必须是任意的，且不能具有任何对称与反对称性质。假若 $B^{l}_{\cdot pq}$ 对于指标 p 与 q 是对称的，将会出现什么情况呢？如果 $B^{l}_{\cdot pq}$ 对于 p 与 q 是对称的，此时不能由式(4.9)得到式(4.10)。因为 $B^{l}_{\cdot pq}$ 不是任意的，对于 p 与 q 又是对称的，则当 $B^{l}_{\cdot pq}$ 的某一个分量(例如 $p=2,q=3$)不为零时，相应的分量 $B^{l}_{\cdot pq}$ 也不为零。这样就可得到两个与式(4.10)类似的方程。将这两个方程相加，得

$$\bar{A}^{rst}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^s}+\bar{A}^{rst}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^s}=A^{pqk}\frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^k}+A^{qpk}\frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^k}$$

改变几个哑指标，得到

$$(\bar{A}^{rst}+\bar{A}^{srt})\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^s}=(A^{pqk}+A^{qpk})\frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^k}$$

内乘以 $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q}$，得

$$(\bar{A}^{rst}+\bar{A}^{srt})\delta^i_r\delta^j_s=(A^{pqk}+A^{qpk})\frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^k}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q}$$

$$(\bar{A}^{ijt}+\bar{A}^{jit})=(A^{pqk}+A^{qpk})\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^k}$$

可见 $A^{pqk}+A^{qpk}$ 是三阶逆变张量。

从例4.1知道，一个张量可以分解为对称与反对称两部分。上面的证明只说明了当 $B^{l}_{\cdot pq}$ 对于指标 p 与 q 是对称时，A^{pqk} 的对称部分是对称的，而其反对称部分是否是张量，证明的结果中并未回答这一问题，因此 A^{pqk} 是不是张量，此时未能作出明确判断。所以运用商定律时必须慎重。

例 4.3 试证标量场的偏导数是一个一阶协变张量。

证 标量的全微分

$$\mathrm{d}\Phi=\frac{\partial \Phi}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k$$

这里 $\mathrm{d}\Phi$ 是一标量(零阶张量)，而 $\mathrm{d}x^k$ 可以是一任意的逆变矢量(一阶张量)，根据商定律可知 $\frac{\partial \Phi}{\partial x^k}$ 是一协变矢量(一阶张量)。

4.4 度量张量

从3.3节我们知道，任何矢量都可以按逆变分量或协变分量的形式分解。即

$$\boldsymbol{a}=a^i\boldsymbol{g}_i \quad 或 \quad \boldsymbol{a}=a_j\boldsymbol{g}^j$$

式中，$\boldsymbol{g}_i$，$\boldsymbol{g}^j$ 分别表示协变基矢量和逆变基矢量。

在斜角坐标系里，两矢量的点积(标量积)除了可以表示为 $a^i b_i$ 外，还可以表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a^i\boldsymbol{g}_i\cdot b^j\boldsymbol{g}_j=\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j a^i b^j=g_{ij}a^i b^j \tag{4.11}$$

或

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_i\boldsymbol{g}^i\cdot b_j\boldsymbol{g}^j=\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}^j a^i b^j=g^{ij}a_i b_j \tag{4.12}$$

式中

$$g_{ij}=\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j,\quad g^{ij}=\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}^j \tag{4.13}$$

容易证明 g_{ij}，g^{ij} 是某一张量的分量。

因为

$$\bar{\boldsymbol{g}}_m=\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^m}\boldsymbol{g}_i,\quad \bar{\boldsymbol{g}}^n=\frac{\partial\bar{x}^n}{\partial x^j}\boldsymbol{g}^j$$

所以

$$\bar{g}_{mn}=\bar{\boldsymbol{g}}_m\cdot\bar{\boldsymbol{g}}_n=\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^m}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^n}\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j=\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^m}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^n}g_{ij}$$

$$\bar{g}^{mn}=\bar{\boldsymbol{g}}^m\cdot\bar{\boldsymbol{g}}^n=\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^i}\frac{\partial\bar{x}^n}{\partial x^j}\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}^j=\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^i}\frac{\partial\bar{x}^n}{\partial x^j}g^{ij}$$

这就证明了 g^{ij}，g_{ij} 分别是二阶逆变张量和二阶协变张量的分量。

由诸分量 g^{ij}，g_{ij} 形成的张量分别称为*逆变度量张量*和*协变度量张量*。因为矢量的点乘是可交换的，所以度量张量是对称张量，即

$$g^{ij}=g^{ji},\quad g_{ij}=g_{ji} \tag{4.14}$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 的长度的平方可表示为

$$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=g_{ij}a^i a^j=g^{ij}a_i a_j \tag{4.15}$$

当我们考察坐标为 x^i 与 $x^i+\mathrm{d}x^i$ 的邻近两点之间的距离时，假定两点间的矢径为 $\boldsymbol{a}$，$|\boldsymbol{a}|^2$ 就表示这两点间的距离。于是

$$\mathrm{d}s^2=g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{4.16}$$

式中，g_{ij} 是 x^i 的函数。限定 $g=|g_{ij}|\neq 0$，这样的空间称为*黎曼空间*(Riemannian space)。

鉴于线元 $\mathrm{d}s$ 的平方是二次形式 $g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$，所以将 $g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ 称为度量，于是 g_{ij} 又称为*度量张量*。用度量张量装备的空间称为*度量空间*，如果 g_{ij} 是正定对称张量，则这个空间称为*欧几里得空间*。

在三维欧几里得空间里，采用笛卡儿直角坐标系，线元的平方是

$$\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}x^1)^2+(\mathrm{d}x^2)^2+(\mathrm{d}x^3)^2$$

除 $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$ 以外，度量张量的所有其他分量都是零。当 $\mathrm{d}x^1=\mathrm{d}x^2=\mathrm{d}x^3=0$ 时，$\mathrm{d}s^2$ 为零；对于 $\mathrm{d}x^1$，$\mathrm{d}x^2$ 与 $\mathrm{d}x^3$ 的所有其他实值，$\mathrm{d}s^2$ 只会取正值。

下面考察协变度量张量 g_{ik} 与逆变度量张量 g^{jk} 之间的关系。

因为 $\boldsymbol{g}_i(i=1,2,\cdots,N)$，$\boldsymbol{g}^j(j=1,2,\cdots,N)$ 两组基矢量都是线性独立的，且 $\boldsymbol{g}_i$ 可

以表示为 $\boldsymbol{g}^j$ 的线性组合，所以令

$$\boldsymbol{g}_i = \alpha_{ij}\boldsymbol{g}^j$$

点乘以 $\boldsymbol{g}_k$，得

$$\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_k = \alpha_{ij}\boldsymbol{g}^j \cdot \boldsymbol{g}_k = \alpha_{ij}\delta^j_k = \alpha_{ik}$$

由式(4.13)可知

$$g_{ik} = \alpha_{ik}$$

再由

$$\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j = g_{ik}\boldsymbol{g}^k \cdot g^{jl}\boldsymbol{g}_l = g_{ik}g^{jl}\boldsymbol{g}^k \cdot \boldsymbol{g}_l = g_{ik}g^{jl}\delta^k_l = g_{ik}g^{jk}$$

因为

$$\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j = \delta^j_i$$

所以

$$g_{ik}g^{jk} = \delta^j_i \tag{4.17}$$

称 g^{jk} 为对称张量 g_{ik} 的逆张量。这说明协变度量张量与逆变度量张量是互逆的，或称它们是共轭张量。这个定义对于其他的二阶张量也是适用的。当然，只有当二阶张量的行列式不等于零时才有共轭张量或逆张量。

4.5 二阶共轭对称张量

设二阶对称协变张量 A_{ij} 的行列式 $|A_{ij}|\neq 0$，令 B^{ij} 表示行列式 $|A_{ij}|$ 中元素 A_{ij} 的余因子除以 $|A_{ij}|$ 的表达式。下面证明这样得到的 B^{ij} 所形成的张量就是二阶对称协变张量 A_{ij} 的共轭张量。

根据行列式理论，有

$$A_{ij}B^{ik} = \delta^k_j$$

这里不能直接用商定律从上式来确定 B^{ik} 的张量性质，因为 A_{ij} 不是任意张量。

选择任意的逆变矢量 C^i，于是 $D_i = A_{ij}C^j$ 是一任意的协变矢量。因为，$|A_{ij}|\neq 0$，从这 N 个方面可惟一地解出用 D_i 表示 C^i 的关系式。

$$D_iB^{ik} = A_{ij}C^jB^{ik} = \delta^k_jC^j = C^k$$

现在若把商定律用于 $D_iB^{ik} = C^k$，便说明了 B^{ik} 是二阶逆变张量。

从定义可知，B^{ij} 也是对称张量。按照上面的推证方法，不难推出，B^{ik} 的共轭张量就是 A_{ij}。

将以上的结论用于度量张量，即可得

$$g_{ik}g^{jk} = \delta^j_i$$

g_{ik} 的行列式 $g \equiv |g_{ik}| \neq 0$，则

$$g^{ik} = \frac{g_{ik} \text{ 的余因式}}{|g_{ik}|} \tag{4.18}$$

例 4.4 试求柱坐标中的协变度量张量和逆变度量张量(图 4.1)。

解 笛卡儿直角坐标 $\bar{x}^k$ 与柱坐标 x^k 的关系是

$\bar{x}^1 = x^1\cos x^2, \bar{x}^2 = x^1\sin x^2, \bar{x}^3 = x^3$。

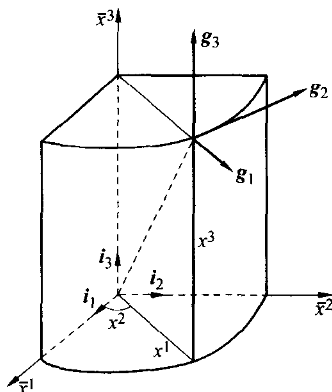


图 4.1

坐标变换的雅可比为

$$\left|\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l}\right| = \begin{vmatrix} \cos x^2 & -x^1\sin x^2 & 0 \\ \sin x^2 & x^1\cos x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^1$$

对于 $x^1 \neq 0$(即柱的心轴除外)可解得

$$x^1 = \sqrt{(\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2}, \quad 0 < x^1 \leqslant \infty$$

$$x^2 = \arctan\left(\frac{\bar{x}^2}{\bar{x}^1}\right), \quad 0 \leqslant x^2 < 2\pi$$

$$x^3 = \bar{x}^3, \quad -\infty \leqslant x^3 \leqslant \infty$$

对于 $x^1 = 0$ 上的点,角 x^2 并不是惟一地决定的。不过,在决定这些点的位置问题上是没有影响的,因为对于 $\bar{x}^3$ 轴的各点而言,我们无需给出角度的大小。

就逆变换矩阵而言,则有

$$\left(\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k}\right) = \begin{pmatrix} \cos x^2 & \sin x^2 & 0 \\ -\frac{1}{x^1}\sin x^1 & \frac{1}{x^1}\cos x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由式(3.18),有基矢量

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{i}_1\cos x^2 + \boldsymbol{i}_2\sin x^2$$

$$\boldsymbol{g}_2 = -\boldsymbol{i}_1 x^1\sin x^2 + \boldsymbol{i}_2 x^1\cos x^2$$

$$\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{i}_3$$

代入式(4.13),可得 $g_{11} = 1, g_{22} = (x^1)^2, g_{33} = 1$,其余的 $g_{12} = g_{21} = \cdots = 0$,即

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由式(4.18)可得

$$g^{11} = 1, \quad g^{22} = \left(\frac{1}{x^1}\right)^2, \quad g^{33} = 1; \quad g^{12} = g^{21} = \cdots = 0$$

即

$$(g^{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(x^1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.6 两矢量间的夹角、正交性

由式(4.15)有

$$|\boldsymbol{a}| = (g_{kl}a^k a^l)^{\frac{1}{2}}$$

两矢量的标量积为

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta = g_{kl}a^k b^l \tag{4.19}$$

于是两矢量之间夹角的余弦为

$$\cos\theta = \frac{g_{kl}a^k b^l}{(g_{mn}a^m a^n)^{\frac{1}{2}}(g_{rs}b^r b^s)^{\frac{1}{2}}} \tag{4.20}$$

在欧几里得空间里，g_{kl}是正定对称张量，否则，称为闵可夫斯基空间。如果是闵可夫斯基空间，可以用零锥面

$$g_{kl}x^k x^l = 0 \tag{4.21}$$

把空间分为两个域。在正域中，一切实数矢量的 $g_{kl}a^k a^l > 0$(正定二次型)；在负域中，实数矢量的 $g_{kl}a^k a^l < 0$，在这种情况下，两矢量之间夹角的余弦为

$$\cos\theta = \frac{\pm g_{kl}a^k b^l}{|(g_{mn}a^m a^n)^{\frac{1}{2}}||(g_{rs}b^r b^s)^{\frac{1}{2}}|}$$

分子的正负号分别对应于正负域。

由上式可知，两矢量 a^i 与 b^j 正交的必要与充分条件是

$$g_{kl}a^k b^l = 0 \tag{4.22}$$

设两矢量中恰巧有一个或都是零矢量，就不定义它们之间的夹角，但仍以式(4.22)作为两零矢量正交的定义，由此可知，零矢量自成正交。

4.7 指标的升降

通过度量张量，可以建立协变矢量与逆变矢量的一一对应关系。由张量运算法则，有

$$g_{ij}v^i = u_j, \quad g^{ij}u_j = v^i$$

可以看到，v^i 与 u_j 是同一个量的两种表达方式。如果用相同的字母表示，则上式可

写成

$$g_{ij}v^i \equiv v_j, \quad g^{ij}v_j = v^i \tag{4.23}$$

这种演算过程称为指标的上升与下降，或简称为升标与降标。v_j 称为 v^i 的相伴矢量，当然，v^i 也就是 v_j 的相伴矢量，因为一矢量与其相伴矢量的关系是互逆的。

利用相同的记号，有

$$g_{ij} = g_{ir}g_{js}g^{rs} \tag{4.24}$$

式(4.24)说明了把 g_{ij} 和 g^{ij} 两个张量用相同的字母"g"来表示是合理的。

相伴矢量的大小(模)是相等的。证明如下。

$$g_{ij}v^iv^j = g_{ij}g^{ir}v_rg^{js}v_s = g_{ij}g^{ir}g^{js}v_rv_s$$

由式(4.24)，可得

$$g^{rs} = g_{ij}g^{ir}g^{js}$$

所以

$$g_{ij}v^iv^j = g^{rs}v_rv_s$$

利用度量张量与一个张量内乘，可以得到这个张量的各种不同的分量。例如从张量 A^{ijk} 可形成相伴张量

$$\left.\begin{aligned} A_p^{\cdot jk} &= g_{ip}A^{ijk} \\ A_{p\cdot q}^{\cdot j} &= g_{pi}g_{qk}A^{ijk} \\ A_{lmn} &= g_{il}g_{jm}g_{kn}A^{ijk} \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

用"·"代替指标空缺的位置，这样使得上升或下降指标时，容易看清其对应关系。在无混淆可能的情况下，可省略"·"号。

4.8 张量的物理分量

我们知道，一个矢量可以写为

$$\boldsymbol{v} = v^k\boldsymbol{g}_k = v_k\boldsymbol{g}^k \tag{4.26}$$

式中，$\boldsymbol{g}_k$ 是在 x^k 点上切于坐标系(k)的坐标曲线的。在这点上，$\boldsymbol{g}_k$ 组成直线坐标系，从而构成一 n 维欧几里得空间。因为一般说来，$\boldsymbol{g}_k$ 与 $\boldsymbol{g}^k$ 并不一定是单位矢量，$\boldsymbol{v}$ 在点 x 上对这些矢量的平行投影 v^k 与 v_k 并没有相同的物理尺度。例如，相对于 x^k 点上的柱坐标系，矢量 $\boldsymbol{v}$ 的分量 v^1 与 v^3 的尺寸为 L，而 v^2 的尺寸则是 $\frac{L}{L}=1$。这是因为基矢量 $\boldsymbol{g}_k$ 的尺寸分别由

$$|\boldsymbol{g}_1| = \sqrt{g_{11}} = 1, \quad |\boldsymbol{g}_2| = \sqrt{g_{22}} = x^1, \quad |\boldsymbol{g}_3| = \sqrt{g_{33}} = 1 \tag{4.27}$$

决定。因此，有必要决定矢量与张量的物理分量。下面先研究矢量的物理分量。

我们在 x^k 上把矢量 $\boldsymbol{v}$ 向与坐标曲线相切的单位矢量 $\boldsymbol{e}_{(k)}$ 投影，于是有

$$\boldsymbol{v} = v^k \boldsymbol{e}_{(k)} \tag{4.28}$$

其中

$$\boldsymbol{e}_{(k)} = \frac{\boldsymbol{g}_k}{\sqrt{g_{\underline{kk}}}} \tag{4.29}$$

注意，凡相同两指标下加一“—”时，表示不求和。

$$\boldsymbol{v} = v^k \boldsymbol{g}_k = v^{(k)} \boldsymbol{e}_{(k)} = v^{(k)} \frac{\boldsymbol{g}_k}{\sqrt{g_{\underline{kk}}}}$$

于是

$$v^{(k)} = v^k \sqrt{g_{\underline{kk}}} \tag{4. 30}$$

由式(4. 30)给出的$\boldsymbol{v}$的分量$v^{(k)}$，称为矢量$\boldsymbol{v}$的逆变物理分量。

同理可得矢量$\boldsymbol{v}$的协变物理分量

$$v_{(l)} = \frac{v_l}{\sqrt{g_{\underline{ll}}}} \tag{4.31}$$

这是由于

$$\boldsymbol{e}^{(k)} \cdot \boldsymbol{e}_{(k)} = 1$$

即

$$\boldsymbol{e}^{(k)} \cdot \frac{\boldsymbol{g}_k}{\sqrt{g_{\underline{kk}}}} = 1$$

故有

$$\boldsymbol{e}_{(l)} \equiv \frac{\boldsymbol{g}_l}{\sqrt{g_{\underline{ll}}}}, \quad \boldsymbol{e}^{(k)} \equiv \boldsymbol{g}^k \sqrt{g_{\underline{kk}}} \tag{4.32}$$

将物理分量的概念推广到张量中。当坐标系是正交系时，则有

$$A^{(k)(l)} = A^{kl} \sqrt{g_{\underline{kk}} g_{\underline{ll}}} \tag{4.33}$$

$$A_{(k)(l)} = \frac{A^{kl}}{\sqrt{g_{\underline{kk}} g_{\underline{ll}}}} \tag{4.34}$$

$$A^{(k)}_{\cdot (l)} = A^{k}_{\cdot l} \sqrt{\frac{g_{\underline{kk}}}{g_{\underline{ll}}}} \tag{4.35}$$

更一般的情况是

$$A^{(k_1)\cdots(k_n)\cdots}_{\cdots(l_1)\cdots(l_m)} = \left(\frac{g_{\underline{k_1 k_1}} \cdots g_{\underline{k_n k_n}}}{g_{\underline{l_1 l_1}} \cdots g_{\underline{l_m l_m}}}\right)^{\frac{1}{2}} A^{k_1\cdots k_n\cdots}_{\cdots l_1 \cdots l_m} \tag{4.36}$$

4.9 排列张量

在具有度量张量 g_{kl} 的 n 维空间里，定义

$$\in^{k_1\cdots k_n} \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \in^{k_1\cdots k_n} \tag{4.37}$$

$$\in_{l_1\cdots l_n} \equiv \sqrt{g} \in_{l_1\cdots l_n} \tag{4.38}$$

式中，$\in^{k_1\cdots k_n}$ 与 $\in_{l_1\cdots l_n}$ 是排列符号。不失一般性，下面我们仅就三维欧几里得空间，证明 $\in^{ijk}$ 与 $\in_{ijk}$ 是张量。

根据行列式（用排列符号表示）的理论，有

$$\in_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} = \in_{lmn} \left| \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s} \right| \tag{4.39}$$

将基本张量从 x^i 坐标系变换到 $\bar{x}^i$ 坐标系中，有

$$\bar{g}_{lm} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} g_{ij} \tag{4.40}$$

它们的行列式为

$$\bar{g} = g \left| \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s} \right|^2, \quad \sqrt{\bar{g}} = \sqrt{g} \left| \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s} \right| \tag{4.41}$$

现在将 $\in_{ijk}$ 从坐标系 x^i 变换到坐标系 $\bar{x}^i$ 中。因为

$$\begin{aligned} \overline{\in}_{lmn} &= \sqrt{\bar{g}} \in_{lmn} = \sqrt{g} \in_{lmn} \left| \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s} \right| \\ &= \sqrt{g} \in_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} \end{aligned}$$

即

$$\overline{\in}_{lmn} = \in_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} \tag{4.42}$$

可见 $\in_{ijk}$ 是三阶协变张量。还有

$$\begin{aligned} \in^{lmn} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \in_{lmn} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left| \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s} \right| \in_{lmn} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \in_{ijk} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k} \end{aligned}$$

即

$$\in^{lmn} = \overline{\in}^{ijk} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k} \tag{4.43}$$

可见 $\in^{ijk}$ 是三阶逆变张量。

由排列符号的性质和排列张量的定义可知

$$\left.\begin{aligned}\in_{ijk} &= +\sqrt{g}, \quad i,j,k\text{ 成偶排列}\\ \in_{ijk} &= -\sqrt{g}, \quad i,j,k\text{ 成奇排列}\\ \in_{ijk} &= 0, \quad \text{其他情况}\end{aligned}\right\} \tag{4.44}$$

和

$$\left.\begin{aligned}\in^{ijk} &= +\frac{1}{\sqrt{g}}, \quad i,j,k\text{ 成偶排列}\\ \in^{ijk} &= -\frac{1}{\sqrt{g}}, \quad i,j,k\text{ 成奇排列}\\ \in^{ijk} &= 0, \quad \text{其他情况}\end{aligned}\right\} \tag{4.45}$$

阵。

4.10 二阶张量的本征值与本征矢量

1. 张量的矩阵记法

由式(3.18)和式(3.25)可知

$$\bar{\boldsymbol{e}}_i = M_{ij}\boldsymbol{e}_j, \quad \bar{A}_i = M_{ij}A_j$$

因为$\boldsymbol{M}=(M_{ij})$是正交矩阵，所以有

$$\boldsymbol{e}_i = M_{ji}\bar{\boldsymbol{e}}_j, \quad A_i = M_{ji}\bar{A}_j$$

同理，二阶协变张量的变换律式(3.29)可以写成

$$\bar{A}_{ij} = M_{ik}M_{jl}A_{kl} \tag{4.46}$$

在三维空间里，分量A_{ij}与$\bar{A}_{ij}$可作为两个3×3矩阵$\boldsymbol{A}$与$\bar{\boldsymbol{A}}$的元素来排列。于是可写成

$$\boldsymbol{A} = (A_{ij}), \quad \bar{\boldsymbol{A}} = (\bar{A}_{ij}) \tag{4.47}$$

这样，变换律式(4.46)可用矩阵符号写为

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{MAM}^{\mathrm{T}} \tag{4.48}$$

对于二阶张量，特别是在研究张量的不变量、主方向以及本征值、本征矢量等内容时，采用矩阵记法是较为方便的。很多结论都可以直接取用第2章所叙述的结果。要注意的是，不要把张量$\boldsymbol{A}$与方阵$\boldsymbol{A}$混同。虽然张量$\boldsymbol{A}$本身与坐标的选择无关，但是在不同的坐标系里，张量$\boldsymbol{A}$有不同的矩阵表示。

下面的讨论中假定空间是欧几里得空间。

2. 本征值

定义 二阶张量A_{ij}的本征值等于方程

$$\det(A_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0 \tag{4.49}$$

的根。

上式是 λ 的 N 次方程。将它变换到新坐标系 $\bar{x}^i$ 时，这个方程就成为

$$\det[(\bar{A}_{pq}-\lambda\bar{g}_{pq})M_{ip}M_{jq}]=0$$

利用行列式的乘法规则，上式可写为

$$\det(\bar{A}_{pq}-\lambda\bar{g}_{pq})\cdot[\det(M_{ip})]^2=0$$

因为

$$\det(M_{ip})\neq 0$$

所以

$$\det(\bar{A}_{pq}-\lambda\bar{g}_{pq})=0 \tag{4.50}$$

比较式(4.49)与式(4.50)可知，张量的本征值 λ 与坐标系无关，亦即本征值是不变量。

在欧几里得空间里采用笛卡儿直角坐标系时，基本张量 g_{ij} 的分量形成单位矩阵。式(4.49)可写成

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$$

如果张量 $\boldsymbol{A}$ 是对称的，则其本征值都是实数(参见 2.4 节)，将这些本征值称为张量 $\boldsymbol{A}$ 的*主分量*或*主值*。用 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的主值，如果 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 都是正数，则 $\boldsymbol{A}$ 是*正定张量*。

3. 本征矢量

定义 如果有两个非零矢量 $\boldsymbol{X}^{(i)}$ 和 $\boldsymbol{X}_{(j)}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_{(i)}\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}^{(i)}=0 \quad (\text{不求和})^{①} \tag{4.51}$$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_{(j)}\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}_{(j)}=0 \tag{4.52}$$

则它们分别称为*右本征矢量*和*左本征矢量*，而且它们都属于同一个本征值 λ。

为了保证非零本征值的存在，式(4.51)、式(4.52)中 $\boldsymbol{X}^{(i)}$ 与 $\boldsymbol{X}_{(j)}$ 的系数行列式一定等于零，这就给出方程组(4.49)。由以上两式还可以看出，同一个二阶张量的右本征矢量和左本征矢量所对应的本征值是相等的。

设张量 $\boldsymbol{A}$ 是对称的，如果 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互异，则 $\boldsymbol{A}$ 的正规化本征矢量 $\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(2)},\boldsymbol{X}^{(3)}$ 是惟一的且是互相正交的。

由式(4.51)，有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(i)}=\lambda_{(i)}\boldsymbol{X}^{(i)} \quad (i=1,2,3,\text{不求和}) \tag{4.53}$$

因为 $\boldsymbol{M}$ 是正交矩阵，等式两边左乘以 $\boldsymbol{M}$，于是

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}^{(i)}=\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}^{(i)}=\lambda_{(i)}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}^{(i)} \quad (\text{不求和})$$

即得

① 从式(4.51)至式(4.58)都不求和。

$$\bar{A}\bar{X}^{(i)} = \lambda_{(i)}\bar{X}^{(i)} \tag{4.54}$$

下面证明它们是互相正交的。

将式(4.53)左乘以 $X^{(j)\mathrm{T}}$，得

$$X^{(j)\mathrm{T}}AX^{(i)} = \lambda_{(i)}X^{(j)\mathrm{T}}X^{(i)} \tag{4.55}$$

同理，有

$$X^{(i)\mathrm{T}}AX^{(j)} = \lambda_{(j)}X^{(i)\mathrm{T}}X^{(j)} \tag{4.56}$$

将式(4.55)转置，得

$$X^{(i)\mathrm{T}}AX^{(j)} = \lambda_{(i)}X^{(i)\mathrm{T}}X^{(j)} \tag{4.57}$$

将式(4.57)与式(4.56)相减，得

$$0 = (\lambda_{(i)} - \lambda_{(j)})X^{(i)\mathrm{T}}X^{(j)} \tag{4.58}$$

因为已设 $\lambda_{(i)} \neq \lambda_{(j)}$，所以

$$X^{(i)\mathrm{T}}X^{(j)} = 0 \tag{4.59}$$

可见这样的本征矢量是互相正交的。

4.11 二阶张量的主方向与不变量

1. 主方向

如同 2.4 节中所述，用类似的方法将张量 A 的矩阵化为对角阵。

用正交归一的 $X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(N)}$ 组成

$$P = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_N^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_N^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(N)} & x_2^{(N)} & \cdots & x_N^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{(1)\mathrm{T}} \\ X^{(2)\mathrm{T}} \\ \vdots \\ X^{(N)\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

$$P^{\mathrm{T}} = (X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(N)})$$

因为 $PP^{\mathrm{T}} = I$，所以 P 是正交矩阵。

将 A 进行相似变换，得

$$\begin{aligned} AP^{\mathrm{T}} &= (AX^{(1)}, AX^{(2)}, \cdots, AX^{(N)}) \\ &= (\lambda_{(1)}X^{(1)}, \lambda_{(2)}X^{(2)}, \cdots, \lambda_{(N)}X^{(N)}) \end{aligned}$$

$$\bar{A} = PAP^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} X^{(1)\mathrm{T}} \\ X^{(2)\mathrm{T}} \\ \vdots \\ X^{(N)\mathrm{T}} \end{pmatrix} (\lambda_{(1)}X^{(1)}, \lambda_{(2)}X^{(2)}, \cdots, \lambda_{(N)}X^{(N)})$$

$$
= \begin{bmatrix} \lambda_{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{(N)} \end{bmatrix} \tag{4.60}
$$

当 $N=3$ 时，

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{4.61}
$$

因此必有这样的一个坐标系存在，对称二阶张量在这个坐标系里的分量所形成的矩阵是一对角阵，且其对角元素为 $\boldsymbol{A}$ 的主值。这个坐标系的坐标轴是 $\boldsymbol{A}$ 的主轴，它们的方向称为张量 A 的主方向。

如果 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 不都是相异的，这些结论仍能成立。如果 $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$，则矢量 $\boldsymbol{x}_{(3)}$ 是惟一确定的，而且可取互相正交并同 $\boldsymbol{x}_{(3)}$ 正交的任何两单位矢量作为 $\boldsymbol{x}_{(1)},\boldsymbol{x}_{(2)}$。如果 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$，则可取任何三个彼此正交的轴作为主轴，这时 $\boldsymbol{A}$ 称为球张量。

2. 不变量

(1) 基本不变量

前面已经说明，$\boldsymbol{A}$ 的主值与坐标的选择无关，它们是张量的不变量。可以证明，如果 $\boldsymbol{A}$ 是对称的，则 $\boldsymbol{A}$ 的任何不变量都能用 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 来表示。就这个意义而言，它们是张量 $\boldsymbol{A}$ 的基本不变量。

2.4 节已证明如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的本征值为 λ，则 λ^n 是 $\boldsymbol{A}^n$ 的本征值，对于张量 $\boldsymbol{A}$ 也是如此。

(2) 迹不变量

在许多应用中，取 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的三个对称函数而不取主值本身作为不变量较为方便。三个这样的函数是

$$
\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\quad \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2,\quad \lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3 \tag{4.62}
$$

这三个量显然是不变量，没有一个能用其他两个来表示，就这个意义而言，他们是独立的。

由式(4.61)可知

$$
\mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{A}} = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3
$$

因为 $\boldsymbol{P}$ 是正交的，

$$
\mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{A}} = \bar{A}_{ii} = P_{ir}P_{is}A_{rs} = \delta_{rs}A_{rs} = A_{rr} = \mathrm{tr}\boldsymbol{A} \tag{4.63}
$$

因此式(4.62)中第一个不变量在任何坐标系里都等于 $\boldsymbol{A}$ 的分量形成的矩阵的迹。

同样

$$
\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 = \mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{A}}^2 = \bar{A}_{ik}\bar{A}_{ki} = P_{ip}P_{kq}A_{pq}P_{kr}P_{is}A_{rs}
$$

$$=\delta_{ps}\delta_{qr}\delta_{pq}A_{pq}A_{rs}=A_{pr}A_{rp}=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2 \tag{4.64}$$

同样还可得

$$\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^3 \tag{4.65}$$

因为 $\mathrm{tr}A$ 同坐标系的选择无关,所以可以定义 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\mathrm{tr}A$,于是也定义了 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2=\mathrm{tr}A^2$,$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^3=\mathrm{tr}A^3$。不变量的集式(4.62)可以表示成

$$\{\mathrm{tr}\boldsymbol{A},\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2,\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^3\} \tag{4.66}$$

我们称其为迹不变量。

(3) 本征方程的系数是不变量

令

$$\left.\begin{aligned}I_1&=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\\I_2&=\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2\\I_3&=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{aligned}\right\} \tag{4.67}$$

显然这三个量是不变量。下面证明 I_1、I_2、I_3 正是凯莱-哈密顿定理所表述的方程

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3-I_1\boldsymbol{A}^2+I_2\boldsymbol{A}-I_3=0 \tag{4.68}$$

中的相应项的系数。

$$\begin{aligned}I_2&=\frac{1}{2}[(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2-(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)]\\&=\frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2]\\&=\frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{A}})^2-\mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{A}}^2]\\I_3&=\det\bar{\boldsymbol{A}}=\det(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})\\&=\det\boldsymbol{P}\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\det\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

因此,$\det\boldsymbol{A}=\det A=I_3$。$\boldsymbol{A}$ 的三个不变量为

$$I_1=\mathrm{tr}\boldsymbol{A},\quad I_2=\frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2],\quad I_3=\det A \tag{4.69}$$

由例 2.8 可知,式(4.68)中的 I_1,I_2,I_3 正是式(4.69)所表示的。

对式(4.68)取迹,并注意到 $\det I=3$,则有

$$\begin{aligned}I_3&=\frac{1}{3}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^3-I_1\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2+I_2\mathrm{tr}\boldsymbol{A})\\&=\frac{1}{3}\left\{\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^3-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2+\frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2]\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\right\}\\&=\frac{1}{3}\left[\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^3-\frac{3}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2\mathrm{tr}\boldsymbol{A}+\frac{1}{2}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^3\right]\end{aligned} \tag{4.70}$$

例 4.5 求二阶对称张量 A_{ij} 的本征值和本征矢量。设

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 6 \end{pmatrix}$$

解 本征方程为

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 6-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda-7)(\lambda-3) = 0$$

所以本征值为 $\lambda_1=3, \lambda_2=3, \lambda_3=7$。注意 $\lambda=3$ 是本征方程的重根。

对应于 $\lambda=3$ 的本征矢量的分量满足下列方程组：

$$x_2 + \sqrt{3}x_3 = 0, \quad \sqrt{3}x_2 + 3x_3 = 0$$

x_1 任意选定。这样有可能确定两个互相正交的本征矢量。

首先我们选择 $x_1=1, x_2=0, x_3=0$，则有 $\boldsymbol{X}^{(1)}=\boldsymbol{i}$。

其次，选 $x_1=0, x_2=\sqrt{3}, x_3=-1$，即 $\boldsymbol{X}^{(2)}=\sqrt{3}\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$。显然，对应于 $\lambda=3$ 的两个本征矢量是互相正交的。

最后，对应于 $\lambda=7$ 有方程组

$$-4x_1 = 0, \quad -3x_2 + \sqrt{3}x_3 = 0, \quad \sqrt{3}x_2 - x_3 = 0$$

解得 $x_1=0, x_2=1, x_3=\sqrt{3}$。因此 $\boldsymbol{X}^{(3)}=\boldsymbol{j}+\sqrt{3}\boldsymbol{k}$ 是对应于 $\lambda=7$ 的本征矢量。这三个本征矢量的方向表示了张量 A_{ij} 的主方向。相应的主值是

$$A_{11} = A_{22} = 3, \quad A_{33} = 7$$

4.12 偏张量

1. 偏张量的定义

在连续统力学中，有时将一个张量分解为其偏量与一球张量之和。本节仍然只限于在三维欧几里得空间里。

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' + \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\mathrm{tr}\boldsymbol{A} \tag{4.71}$$

于是

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\mathrm{tr}\boldsymbol{A} \tag{4.72}$$

将式(4.72)两边取迹，注意到 $\det\boldsymbol{I}=3$，则有

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}' = 0 \tag{4.73}$$

迹为零的张量称为偏张量。如果偏张量 $\boldsymbol{A}'$ 是对称张量，则它只有五个独立的分

量，这是因为附加了迹为零这一约束条件。

2. 本征值与本征矢量

将式(4.72)右边乘以 $\boldsymbol{A}$ 的本征矢量 $\boldsymbol{x}$，得

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \left(\lambda - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}$$

令偏张量 $\boldsymbol{A}'$ 的本征值为 $\lambda' = \lambda - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$，则上式表明了偏张量的本征矢量与原张量的本征矢量相同。$\boldsymbol{A}'$ 的本征值为

$$\lambda_i' = \lambda_i - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \tag{4.74}$$

3. 不变量

因为偏张量的迹为零，所以第一个不变量 $I' = \mathrm{tr}\boldsymbol{A}' = 0$，剩下的两个独立的不为零的不变量是 I_2' 和 I_3'，有

$$I_2' = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}'^2, \quad I_3' = \det\boldsymbol{A}' = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}'^3 \tag{4.75}$$

因为

$$\boldsymbol{A}'^2 = \left(\boldsymbol{A} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\right)^2 = \boldsymbol{A}^2 - \frac{2}{3}\boldsymbol{A}\mathrm{tr}\boldsymbol{A} + \frac{1}{9}\boldsymbol{I}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2$$

两边取迹

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}'^2 = \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2 - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2$$

于是

$$\begin{aligned} I_2' &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2 + \frac{1}{6}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2 \\ &= \frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2 - \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2] - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2 = I_2 - \frac{1}{3}I_1 \end{aligned} \tag{4.76}$$

又因

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^3 &= \left(\boldsymbol{A} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\right)^3 \\ &= \boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{A}^2\mathrm{tr}\boldsymbol{A} + \frac{1}{3}\boldsymbol{I}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2 - \frac{1}{27}\boldsymbol{I}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^3 \end{aligned}$$

两边取迹

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}'^3 = \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^3 - \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2\mathrm{tr}\boldsymbol{A} + \frac{2}{9}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^3$$

所以

$$\begin{aligned}
I_3' &= \frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}'^3 = \frac{1}{3}\left[\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^3 - \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2\mathrm{tr}\boldsymbol{A} + \frac{2}{9}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^3\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^3 - \frac{3}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2\mathrm{tr}\boldsymbol{A} + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^3\right] \\
&\quad + \frac{1}{6}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}[\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2 - (\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2] + \frac{2}{27}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^3 \\
&= I_3 - \frac{1}{3}I_1 I_2 + \frac{2}{27}I_1^3
\end{aligned} \tag{4.77}$$

这样，可用 I_1,I_2,I_3 表示 I_2',I_3'，同时也可以用 I_1,I_2',I_3' 表示 I_2,I_3。所以采用集 $\{I_1,I_2',I_3'\}$ 作为 $\boldsymbol{A}$ 的基本不变量集，与采用集 $\{I_1,I_2,I_3\}$ 作为 $\boldsymbol{A}$ 的基本不变量集是等价的。

习　　题

4.1　设 A_{ij} 和 B_{ij} 是二阶协变张量，试证 $\lambda A_{ij}+\mu B_{ij}$ 是二阶协变张量，式中 λ,μ 是标量。

4.2　试问二阶逆变对称张量最多有多少个不同的分量？设(1) $N=4$；(2) $N=6$；(3) N 为任意数。

4.3　设张量 $A^{pqr}_{\cdot\cdot\cdot st}$ 在一个坐标系中对于指标 p 与 q 是对称的(或反对称的)，试证它在任何坐标系中对于指标 p 与 q 都是对称的(或反对称的)。

4.4　设 $A^{pq}_{\cdot\cdot rs}$ 是张量，试证 $A^{pq}_{\cdot\cdot rs}+A^{qp}_{\cdot\cdot rs}$ 是对称张量，$A^{pq}_{\cdot\cdot rs}-A^{qp}_{\cdot\cdot rs}$ 是反对称张量。

4.5　设 A_{ij} 是对称张量，B_{ij} 是反对称张量，试证 $A_{ij}B_{ij}=0$。

4.6　设 A^p_q 与 B_r 是张量，试证 $A^p_{\cdot q}B^r$ 与 $A^p_qB^q$ 是张量，并说明它们的阶数。

4.7　如果用 D_{ij} 的对称部分 $D_{(ij)}$ 代替 D_{ij}，试证二次型 $D_{ij}x_ix_j$ 是不变的。

4.8　设 A^{pq} 和 B_{rs} 是反对称张量，试证 $C^{pq}_{rs}=A^{pq}B_{rs}$ 是对称的。

4.9　设 $\Phi=a_{jk}A^jA^k$，试证：总可以写出 $\Phi=b_{jk}A^jA^k$，式中 b_{jk} 是对称的。

4.10　设 A_{pq} 是反对称张量，试证 $A_{pq}x^px^q=0$。

4.11　试证张量 $A^p_{\cdot q}$ 的缩并是标量(或不变量)。

4.12　设 $A^{pq\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\cdot rst}$ 是张量，选择 $p=t,q=s$，试证缩并后仍是张量，并说明它的阶数。

4.13　试证张量 A^p 与 B_q 的外积的缩并是不变量。

4.14　试建立下列相伴张量之间的关系：(1) A^{pq} 与 $A_j^{\cdot q}$；(2) $A^{p\cdot r}_{\cdot q}$ 与 A_{jpl}。

4.15　试建立下列相伴张量之间的关系：(1) $A_{j\cdot l}^{\cdot k}$ 与 A^{qkr}；(2) $A^{p\cdot rs}_{\cdot q\cdot\cdot t}$ 与 $A_{jqk}^{\cdot\cdot\cdot sl}$。

4.16　试建立下列相伴张量之间的关系：(1) A^{jkl} 与 A_{pqr}；(2) $A_{pq}^{\cdot\cdot r}$ 与 $A^{jk}_{\cdot\cdot l}$。

4.17　试证张量 $A^{p}_{\cdot r}$ 与 $B^{qs}_{\cdot\cdot t}$ 的任何一对指标相同时，所求的内积是三阶张量。

4.18　试证：(1) $A_{p}^{\cdot q}B^{p}_{\cdot rs}=A^{pq}B_{prs}$；(2) $A^{pq}_{\cdot\cdot r}B_{p}^{\cdot r}=A_{p\cdot r}^{\cdot q}B^{pr}=A_{p}^{\cdot qr}B^{p}_{\cdot r}$。从而论证哑标的升降不改变该项的值这一普遍结论。

4.19　设 A^{p} 与 B_{q} 是任意张量，若 $A^{p}B_{q}C(p,q)$ 是不变量，试证 $C(p,q)$ 是一张量，并且能写成 $C^{q}_{\cdot p}$。

4.20　设 $A(p,q)B_{q}=C^{p}$，式中 B_{q} 是一任意的一阶协变张量，C^{p} 是一个一阶的逆变张量，试证 $A(p,q)$ 是一个二阶混合张量。

4.21　设 A^{i} 和 B^{i} 是任意的逆变矢量，而 $C_{ij}A^{i}B^{j}$ 是不变量，试证 C_{ij} 是二阶协变张量。

4.22　设 A^{i} 是任意的逆变矢量，而 $C_{ij}A^{i}A^{j}$ 是不变量，试证 $C_{ij}+C_{ji}$ 是二阶协变张量。

4.23　设 $\mathrm{d}s^{2}=g_{ij}\mathrm{d}x^{i}\mathrm{d}x^{j}$ 是不变量，试证 g_{ij} 是二阶对称协变张量。

4.24　试求球坐标系中的度量张量。

4.25　(1) 用第二行的元素及其余因式展开行列式：

$$g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

(2) 试证 $g=g_{jk}G(j,k)$，式中 $G(j,k)$ 是 g_{jk} 的余因式，该式仅对指标 k 求和。

4.26　试证：(1) $g_{21}G(3,1)+g_{22}G(3,2)+g_{23}G(3,3)=0$；(2) 若 $j\neq p$，$g_{jk}G(p,k)=0$。

4.27　定义 $g^{jk}=\dfrac{G(j,k)}{g}$，式中 $G(j,k)$ 是行列式 $g=|g_{jk}|\neq 0$ 中元素 g_{jk} 的余因式，试证 $g_{jk}g^{pk}=\delta_{j}^{p}$。

4.28　试证在正交坐标系里，$g_{11}=\dfrac{1}{g^{11}}$，$g_{22}=\dfrac{1}{g^{22}}$，$g_{33}=\dfrac{1}{g^{33}}$。

4.29　设矢量 v_{i} 用基矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示为 $v_{i}=\alpha a_{i}+\beta b_{i}+\gamma c_{i}$，试证 $\alpha=\dfrac{\in_{ijk}v_{i}b_{j}c_{k}}{\in_{pqr}a_{p}b_{q}c_{r}}$，$\beta=\dfrac{\in_{ijk}a_{i}v_{j}c_{k}}{\in_{pqr}a_{p}b_{q}c_{r}}$，$\gamma=\dfrac{\in_{ijk}a_{i}b_{j}v_{k}}{\in_{pqr}a_{p}b_{q}c_{r}}$。

4.30　设两组坐标系的轴间夹角如表所示，试求其变换系数，并证明它们是互相正交的。

	x^{1}	x^{2}	x^{3}
$\bar{x}^{1}$	135°	60°	120°
$\bar{x}^{2}$	90°	45°	45°
$\bar{x}^{3}$	45°	60°	120°

4.31 设 $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}^j = \delta_i^j$，则 $\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \boldsymbol{a}^3$ 称为基矢 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 的互逆基矢（不一定是单位矢量），试建立构成互逆基矢的必要关系，并计算下列矢量的逆矢：

$$\boldsymbol{b}_1 = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{b}_2 = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

4.32 试证 g_{pq}，g^{pq} 与 δ_q^p 是相伴张量。

4.33 设 $\mathrm{d}s^2 = 5(\mathrm{d}x^1)^2 + 3(\mathrm{d}x^2)^2 + 4(\mathrm{d}x^3)^2 - 6\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 + 4\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$，试求 g 与 g^{jk}。

4.34 设 $\mathrm{d}s^2 = 3(\mathrm{d}x^1)^2 + 2(\mathrm{d}x^2)^2 + 4(\mathrm{d}x^3)^2 - 6\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^3$，试求 g 与 g^{jk}。

4.35 （1）设 A^p 与 B^q 是矢量，试证 $g_{pq}A^pB^q$ 是不变量；（2）再证 $\dfrac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}}$ 是不变量。

4.36 两组笛卡儿直角坐标轴间夹角的方向余弦部分地列于表中。如果 $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$ 也是右手系，试填写表的最下一行的空格。

4.37 试证三维空间里曲线坐标之间夹角的余弦为

$$\cos\theta_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}, \quad \cos\theta_{23} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}, \quad \cos\theta_{31} = \frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}}$$

	x^1	x^2	x^3
$\bar{x}^1$	3/5	−4/5	0
$\bar{x}^2$	0	0	1
$\bar{x}^3$			

4.38 试证三维空间里正交坐标系的 $g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0$。

4.39 试证 $L^2 = g_{pq}A^pA^q$ 是不变量。

4.40 试证上题中 $L^2 = g^{pq}A_pA_q$。

4.41 设 $A_j = g_{jk}A^k$，试证 $A^k = g^{jk}A_j$。

4.42 设 $A^k = g^{jk}A_j$，试证 $A_j = g_{jk}A^k$。

4.43 计算柱坐标系的共轭基本张量。

4.44 计算球坐标系的共轭基本张量。

4.45 试将下列变换方程写成矩阵形式：（1）协变矢量的变换方程；（2）二阶逆变张量的变换方程（$N=3$）。

4.46 试将下列变换方程写成矩阵形式：（1）逆变矢量的变换方程；（2）二阶协变张量的变换方程；（3）二阶混合张量的变换方程（$N=3$）。

4.47 设二阶对称张量 A_{ij} 的矩阵表示形式为

$$(A_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

试求它的本征值与本征矢量。

4.48 设二阶对称张量的矩阵$(A_{ij})=\begin{pmatrix}7&3&0\\3&7&4\\0&4&7\end{pmatrix}$，试求它的主值和主轴方向。

4.49 将题4.47中的张量A_{ij}化为对角形。

4.50 计算张量$\boldsymbol{B}=(B_{ij})=\begin{pmatrix}3&2&0\\2&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$的平方根$\sqrt{\boldsymbol{B}}$。

4.51 设张量$\boldsymbol{A}=(A_{ij})=\begin{pmatrix}5&-1&-1\\-1&4&0\\-1&0&4\end{pmatrix}$，利用$\boldsymbol{A}^2$与$\boldsymbol{A}$的主轴重合这一结论，求$\boldsymbol{A}$的平方根$\sqrt{\boldsymbol{A}}$。

4.52 设张量$\boldsymbol{B}=(B_{ij})=\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&3&0\\-1&0&2\end{vmatrix}$，利用凯莱-哈密顿定理求$\boldsymbol{B}^4$。

第 5 章 张量分析

为了便于讨论张量分析和空间的曲率，本章首先引入由基本张量 g_{ij} 形成的第一种和第二种克里斯托费尔符号(Christoffel symbol)。逆变矢量和协变矢量的协变偏导数均具有张量性质。矢量的协变微分法能否推广于张量，回答是肯定的。5.3 节详细推导了二阶混合张量的协变导数是三阶混合张量，随后讲述了协变微分法三条规则。不变微分算子是指梯度、散度、旋度和拉普拉斯算子。权为零的张量是绝对张量，权为 1 的张量称为张量密度，权为其他数时一般称为相对张量。

5.1 克里斯托费尔符号

1. 定义

第一种克里斯托费尔符号：

$$[ij,k]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \tag{5.1}$$

第二种克里斯托费尔符号：

$$\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}=g^{lk}[ij,k]\ ① \tag{5.2}$$

---

① 有不少书籍，尤其是欧洲的书籍，用 $\Gamma_{k.ij}$ 和 Γ^l_{ij} 表示第一种和第二种克里斯托费尔符号，即 $\Gamma_{k.ij}=[ij,k]$，$\Gamma^l_{ij}=\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}$。

引入的这两种符号，是否是张量，待讨论了它们的变换律即可断定。两种符号中的指标除一个（如 l）看作是上标外，其余的都看作下标，它们适用于一个上标和一个下标的求和约定。

将式(5.2)内乘以 g_{lm}，得

$$[ij,m] = g_{lm}\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix} \tag{5.3}$$

从定义可知，这两种符号对于 i,j 都是对称的，即

$$[ij,k]=[ji,k],\quad \begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l \\ ji \end{Bmatrix} \tag{5.4}$$

于是在 N 维黎曼空间 R_N 中，都各有 $\dfrac{N^2(N+1)}{2}$ 个独立的分量。例如，对于 $N=3$ 而言，$[ij,k]$ 有 18 个独立分量：

$[11,1],[11,2],[11,3],[12,1]=[21,1],[23,1]=[32,1],[31,1]=[13,1],$
$[22,1],[22,2],[22,3],[12,2]=[21,2],[23,2]=[32,2],[31,2]=[13,2],$
$[33,1],[33,2],[33,3],[12,3]=[21,3],[23,3]=[32,3],[31,3]=[13,3]$

对于 $\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}$ 也类似地有 18 个独立的分量。

2. 用克里斯托费尔符号表示基本张量的导数

(1) 由式(5.1)，有

$$[ij,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

改变哑标，有

$$[kj,i] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\right)$$

因为 g_{ij} 是对称张量，将以上两式相加，得

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = [ij,k]+[kj,i] \tag{5.5}$$

(2) 因为

$$g_{ij}g^{ik} = \delta_j^k$$

对 x^l 微分，得

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}g^{ik} + \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}g_{ij} = 0$$

内乘以 g^{jm}，有

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}g_{ij}g^{jm} = \frac{\partial g^{mk}}{\partial x^l} = -\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}g^{ik}g^{jm}$$

将式(5.5)和式(5.2)代入上式，得

$$\frac{\partial g^{mk}}{\partial x^l}=-g^{ik}g^{jm}[il,j]-g^{ik}g^{jm}[jl,i]$$

$$=-g^{ik}\begin{Bmatrix}m\\il\end{Bmatrix}-g^{jm}\begin{Bmatrix}m\\jl\end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial g^{mk}}{\partial x^l}=-g^{ik}\begin{Bmatrix}m\\il\end{Bmatrix}-g^{im}\begin{Bmatrix}m\\il\end{Bmatrix} \tag{5.6}$$

例 5.1 试证$\begin{Bmatrix}j\\jm\end{Bmatrix}=\frac{\partial}{\partial x^m}\ln\sqrt{g}$。

证 g_{jk}的行列式$g=|g_{jk}|=g_{jk}G(j,k)$(仅对k求和)，而g_{jk}的余因式$G(j,k)=g^{jk}g$。

注意到$G(j,k)$中不包含g_{jk}，所以

$$\frac{\partial g}{\partial g_{jr}}=G(j,r)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^m}=\frac{\partial g}{\partial g_{jr}}\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m}=G(j,r)\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m}$$

$$=gg^{jr}\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m}=gg^{jr}([jm,r]+[rm,j])$$

$$=g\left(\begin{Bmatrix}j\\jm\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}r\\rm\end{Bmatrix}\right)=2g\begin{Bmatrix}j\\jm\end{Bmatrix}$$

于是

$$\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^m}=\begin{Bmatrix}j\\jm\end{Bmatrix}\quad 或\quad \begin{Bmatrix}j\\jm\end{Bmatrix}=\frac{\partial}{\partial x^m}\ln\sqrt{g} \tag{5.7}$$

3. 克里斯托费尔符号的变换律

协变基本张量g_{ij}的变换关系是

$$\bar{g}_{lm}=\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}g_{ij} \tag{5.8}$$

将上式对$\bar{x}^n$求偏导数，得

$$\frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial \bar{x}^n}=\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}+\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^n}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}g_{ij}+\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^m\partial \bar{x}^n}g_{ij} \tag{a}$$

轮换指标l,m,n和i,j,k，并适当改变哑标，得如下两个类似的方程：

$$\frac{\partial \bar{g}_{nl}}{\partial \bar{x}^n}=\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}+\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^n\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}g_{ki}$$

$$+\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^m}g_{ki} \tag{b}$$

$$\frac{\partial \bar{g}_{mn}}{\partial \bar{x}^l}=\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{ki}}{\partial \bar{x}^l}+\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^m\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}g_{jk}$$
$$+\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^n\partial \bar{x}^l}g_{jk} \tag{c}$$

$\frac{(b)+(c)-(a)}{2}$得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{g}_{nl}}{\partial \bar{x}^m}+\frac{\partial \bar{g}_{mn}}{\partial \bar{x}^l}-\frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial \bar{x}^n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}$$
$$+g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^m}$$

$$\overline{[lm,n]}=[ij,k]\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}+g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^m} \tag{5.9}$$

逆变基本张量 g^{rs} 的变换关系是

$$\bar{g}^{np}=g^{rs}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s} \tag{5.10}$$

将式(5.9)的两边内乘以式(5.10)的相应两边，化简后得

$$\overline{\begin{Bmatrix} p \\ lm \end{Bmatrix}}=\begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}+\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^m} \tag{5.11}$$

式(5.9)与式(5.11)给出了两种克里斯托费尔符号的变换律，符号上方的横线表示它是在坐标系 $\bar{x}^i$ 里对于基本张量 $\bar{g}_{ij}$ 计算的。变换关系表明两种克里斯托费尔符号都不是张量。可是在坐标的线性变换中，在$\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^m}=0$ 这种十分特殊的情况下，这两种符号的变换律就像张量的变换律一样。

将式(5.11)两边内乘以$\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}$，得

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^m}=\overline{\begin{Bmatrix} p \\ lm \end{Bmatrix}}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}-\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \tag{5.12}$$

这是用 x^r 对 $\bar{x}^s$ 的一阶偏导数和第二种克里斯托费尔符号表示二阶偏导数的一个重要方程，以后常用到这个关系。

5.2 矢量的协变微分

在研究矢量的协变导数之前，先考察基矢量 $\boldsymbol{g}_k$ 与 $\boldsymbol{g}^k$ 的协变导数。

协变基矢量 $\boldsymbol{g}_k$ 的协变导数是

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^l}=\begin{Bmatrix} m \\ kl \end{Bmatrix}\boldsymbol{g}_m \tag{5.13}$$

逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^k$ 的协变导数是

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^k}{\partial x^l} = -\begin{Bmatrix} k \\ lm \end{Bmatrix} \boldsymbol{g}^m \tag{5.14}$$

先证明式(5.13)。借助于三维图形，如图 5.1 所示，列出两组基矢量之间的变换关系如下：

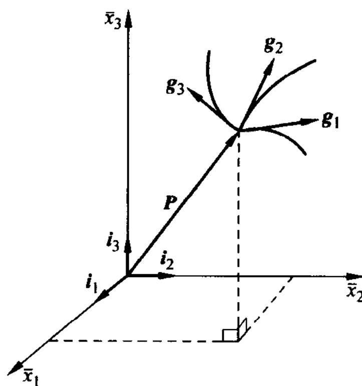


图 5.1

$$\boldsymbol{g}_k = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} \boldsymbol{i}_j, \quad \boldsymbol{i}_j = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \boldsymbol{g}_k \tag{5.15}$$

$$g_{kl} = \boldsymbol{g}_k \cdot \boldsymbol{g}_l = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \delta_{ji} \tag{5.16}$$

$$\boldsymbol{g}^k = g^{kl} \boldsymbol{g}_l, \quad \boldsymbol{g}_k = g_{kl} \boldsymbol{g}^l \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^l} \boldsymbol{g}_k = \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^l \partial x^k} \boldsymbol{i}_j = \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^l \partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} \boldsymbol{g}_m$$

即

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^l} = \begin{Bmatrix} m \\ kl \end{Bmatrix} \boldsymbol{g}_m$$

下面只需证明

$$\begin{Bmatrix} m \\ kl \end{Bmatrix} = \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}$$

将式(5.16)代入式(5.1)，得

$$\begin{aligned}
[kl, m] &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^m} \delta_{rs} \right) + \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^l} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^m} \delta_{rs} \right) - \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^l} \delta_{rs} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{x}^r}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^m} \delta_{rs} + \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} \frac{\partial^2 \bar{x}^s}{\partial x^l \partial x^m} \delta_{rs} + \frac{\partial^2 \bar{x}^r}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^m} \delta_{rs} + \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^l} \frac{\partial^2 \bar{x}^s}{\partial x^k \partial x^m} \delta_{rs} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial^2 \bar{x}^r}{\partial x^m \partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^l} \delta_{rs} - \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} \frac{\partial^2 \bar{x}^s}{\partial x^m \partial x^l} \delta_{rs} \right)
\end{aligned}$$

容易看出，第 2 项与第 6 项相消；由于 $\delta_{rs} = \delta_{sr}$，所以第 4 项与第 5 项相消，于是上式可以写成

$$[kl, m] = \frac{\partial^2 \bar{x}^r}{\partial x^l \partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^m} \delta_{rs}$$

由式(5.2)，有

$$\begin{Bmatrix} m \\ kl \end{Bmatrix} = g^{mn} [kl, n] = g^{mn} \frac{\partial^2 \bar{x}^r}{\partial x^l \partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^n} \delta_{rs}$$

但是

$$g^{mn}\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^n}\delta_{rs}=\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^n}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^q}\delta^{pq}\delta_{rs}=\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}\delta^{pq}\delta_{rs}=\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r}$$

所以

$$\begin{Bmatrix} m \\ kl \end{Bmatrix}=\frac{\partial^2 \bar{x}^r}{\partial x^k \partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r}$$

这就证明了式(5.13)。下面再证明式(5.14)。

由式(5.17)，有

$$g^{km}=g^{kp}g^{mn}g_{pn}$$

所以 g^{km} 对 x^l 的偏导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial g^{km}}{\partial x^l}&=\frac{\partial g^{kp}}{\partial x^l}g^{mn}g_{pn}+g^{kp}\frac{\partial g^{mn}}{\partial x^l}g_{pn}+g^{kp}g^{mn}\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l}\\&=\frac{\partial g^{kp}}{\partial x^l}g^{m}_{\cdot p}+\frac{\partial g^{mn}}{\partial x^l}g^{k}_{\cdot n}+g^{kp}g^{mn}\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l}\\&=2\frac{\partial g^{pm}}{\partial x^l}+g^{kp}g^{mn}\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l}\end{aligned}$$

于是，得

$$\frac{\partial g^{km}}{\partial x^l}=-g^{kp}g^{mn}\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l} \tag{a}$$

又由式(5.17)，有

$$\boldsymbol{g}^k=g^{km}\boldsymbol{g}_m$$

所以有

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^k}{\partial x^l}=\frac{\partial g^{km}}{\partial x^l}\boldsymbol{g}_m+g^{km}\frac{\partial \boldsymbol{g}_m}{\partial x^l}=\frac{\partial g^{km}}{\partial x^l}\boldsymbol{g}_m+g^{kn}\frac{\partial \boldsymbol{g}_n}{\partial x^l}$$

将式(a)及式(5.13)代入上式，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{g}^k}{\partial x^l}&=-g^{kp}g^{mn}\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l}\boldsymbol{g}_m+g^{kn}\begin{Bmatrix} m \\ nl \end{Bmatrix}\boldsymbol{g}_m\\&=\left(-g^{kp}g^{mn}\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l}+g^{kn}g^{ms}[nl,s]\right)\boldsymbol{g}_m\\&=\left(-g^{kp}g^{mn}\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l}+g^{kp}g^{mn}[pl,n]\right)\boldsymbol{g}_m\\&=\left(-g^{kp}\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l}+g^{kp}[pl,n]\right)\boldsymbol{g}^n\\&=g^{kp}\left(-\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ln}}{\partial x^p}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pl}}{\partial x^n}\right)\boldsymbol{g}^n\\&=-g^{kp}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{pl}}{\partial x^n}-\frac{\partial g_{ln}}{\partial x^p}\right)\boldsymbol{g}^n\\&=-g^{kp}[ln,p]\boldsymbol{g}^n=-\begin{Bmatrix} k \\ ln \end{Bmatrix}\boldsymbol{g}^n\end{aligned}$$

这就证明了式(5.14)。[①]

现在研究矢量的协变导数。

(1) 将矢量 $\boldsymbol{u}$ 写成 $\boldsymbol{u}=u^k\boldsymbol{g}_k$，于是有

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^l}=\frac{\partial u^k}{\partial x^l}\boldsymbol{g}_k+u^k\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^l}=\left[\frac{\partial u^k}{\partial x^l}+\begin{Bmatrix}k\\lm\end{Bmatrix}u^m\right]\boldsymbol{g}_k$$

记

$$u^k_{\cdot,l}=\frac{\partial u^k}{\partial x^l}+\begin{Bmatrix}k\\lm\end{Bmatrix}u^m \tag{5.18}$$

$u^k_{\cdot,l}$ 称为逆变矢量 u^k 的协变偏导数。

特别地

$$u^k_{\cdot,k}=\frac{\partial u^k}{\partial x^k}+\begin{Bmatrix}k\\jk\end{Bmatrix}u^j=\frac{\partial u^k}{\partial x^k}+u^j\frac{\partial}{\partial x^j}(\ln\sqrt{g})$$

于是

$$u^k_{\cdot,k}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}u^j) \tag{5.19}$$

(2) 将矢量 $\boldsymbol{u}$ 写成 $\boldsymbol{u}=u_k\boldsymbol{g}^k$，于是有

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^l}=\frac{\partial u_k}{\partial x^l}\boldsymbol{g}^k+u_k\frac{\partial \boldsymbol{g}^k}{\partial x^l}=\left[\frac{\partial u_k}{\partial x^l}-\begin{Bmatrix}m\\kl\end{Bmatrix}u_m\right]\boldsymbol{g}^k$$

记

$$u_{k,l}=\frac{\partial u_k}{\partial x^l}-\begin{Bmatrix}m\\kl\end{Bmatrix}u_m \tag{5.20}$$

$u_{k,l}$ 称为协变矢量 u_k 的协变偏导数。

最后证明协变偏导数的张量性质。

因为

$$A^k=\overline{A}^j\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^j} \tag{5.21}$$

将此变换律对 x^j 求偏导数，得

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^j}=\frac{\partial \overline{A}^i}{\partial \overline{x}^n}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}+\overline{A}^i\frac{\partial^2 x^k}{\partial \overline{x}^i\partial \overline{x}^n}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^j}$$

利用式(5.12)消除二阶偏导数，得

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^j}=\frac{\partial \overline{A}^i}{\partial \overline{x}^n}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}+\overline{A}^i\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^j}\left[\overline{\begin{Bmatrix}p\\in\end{Bmatrix}}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^p}-\begin{Bmatrix}h\\rs\end{Bmatrix}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^n}\right]$$

---

① 式(5.13)与式(5.14)的证明引自 A. C. Eringen 主编，钱伟长译《张量分析》(现代连续统物理丛书(1))一书中的译注(99 页)。

由式(5.21)并适当改变哑指标，方程化为

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^j}+\begin{Bmatrix}k\\rj\end{Bmatrix}A^r=\left(\frac{\partial \overline{A}^i}{\partial \overline{x}^n}+\overline{\begin{Bmatrix}i\\rn\end{Bmatrix}}\overline{A}^r\right)\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}$$

即

$$A^k_{\cdot j}=\overline{A}^i_{\cdot n}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \tag{5.22}$$

此式表明 A^k 对 x^j 的协变偏导数是二阶混合张量。

又因为

$$\overline{A}_i=A_j\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i} \tag{5.23}$$

将此式对 $\overline{x}^l$ 求偏导数，得

$$\frac{\partial \overline{A}_i}{\partial \overline{x}^l}=\frac{\partial A_j}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i}+A_j\frac{\partial^2 x^j}{\partial \overline{x}^i\partial \overline{x}^l}$$

再用式(5.12)消除二阶偏导数，并适当改变哑指标，将式(5.23)代入后经过演算得

$$\frac{\partial \overline{A}_i}{\partial \overline{x}^l}-\overline{\begin{Bmatrix}m\\il\end{Bmatrix}}\overline{A}_m=\frac{\partial A_j}{\partial x^n}-\begin{Bmatrix}r\\jn\end{Bmatrix}A_r\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^l}$$

即

$$\overline{A}_{i,l}=A_{j,n}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^l} \tag{5.24}$$

此式表明 A_j 对 x^n 的协变偏导数是二阶协变张量。

在 N 维欧几里得空间里，如果选用的坐标系是笛卡儿直角坐标系，除了 $g_{11}=g_{22}=\cdots=g_{NN}=1$ 外，基本张量 g_{ij} 的其他分量都为零，所有的克里斯托费尔符号都为零。于是协变偏导数就和一般的偏导数相同，协变微分法就化为一般的偏微分法。然而，即使是在欧几里得空间，如果采用球坐标系，则克里斯托费尔符号便不都等于零。

5.3　张量的协变微分

上节我们讨论了矢量的协变微分法，得出了含有矢量偏导数的张量。这样的协变微分法能否推广于张量？本节将作出肯定的回答。为了不失普遍性，以二阶混合张量 A^i_j 为例，因为这个张量既有逆变指标又有协变指标，因此它具有普遍意义。

$$\overline{A}^i_j=\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j}A^k_l$$

将上式内乘以$\dfrac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^i}$，得

$$\bar{A}^i_j \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} = A^m_l \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \tag{5.25}$$

对 $\bar{x}^k$ 微分，并利用式(5.12)消去二阶偏导数，得

$$\frac{\partial \bar{A}^i_j}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} + \bar{A}^i_j\left[\overline{\begin{Bmatrix} p \\ ik \end{Bmatrix}}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^p} - \begin{Bmatrix} m \\ rs \end{Bmatrix}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k}\right]$$

$$= \frac{\partial A^m_l}{\partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} + A^m_l\left(\overline{\begin{Bmatrix} p \\ jk \end{Bmatrix}}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^p} - \begin{Bmatrix} l \\ rs \end{Bmatrix}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k}\right)$$

根据式(5.25)并适当改变哑指标，方程化为

$$\left(\frac{\partial \bar{A}^i_j}{\partial \bar{x}^k} + \bar{A}^n_p\overline{\begin{Bmatrix} i \\ nk \end{Bmatrix}} - \bar{A}^i_p\overline{\begin{Bmatrix} p \\ jk \end{Bmatrix}}\right)\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}$$

$$= \left(\frac{\partial A^m_l}{\partial x^t} + A^r_l\begin{Bmatrix} m \\ rt \end{Bmatrix} - A^m_r\begin{Bmatrix} r \\ lt \end{Bmatrix}\right)\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}$$

引入逗号记法：

$$A^m_{l,t} \equiv \frac{\partial A^m_l}{\partial x^t} + A^r_l\begin{Bmatrix} m \\ rt \end{Bmatrix} - A^m_r\begin{Bmatrix} r \\ lt \end{Bmatrix} \tag{5.26}$$

于是上面的方程化为

$$\bar{A}^i_{j,k}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} = A^m_{l,t}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}$$

内乘以$\dfrac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m}$，得

$$\bar{A}^r_{j,k} = A^m_{l,t}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} \tag{5.27}$$

可见，$A^m_{l,t}$是三阶混合张量。这个张量称为 A^m_l 对 x^t 的协变导数。

用类似的方法，可以推得二阶逆变张量的协变导数是三阶混合张量，而二阶协变张量的协变导数是三阶协变导数，即

$$A^{kl}_{,m} \equiv \frac{\partial A^{kl}}{\partial x^m} + A^{rl}\begin{Bmatrix} k \\ mr \end{Bmatrix} + A^{kr}\begin{Bmatrix} l \\ mr \end{Bmatrix} \tag{5.28}$$

$$\bar{A}^{rs}_{,t} = A^{kl}_{,m}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k}\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^t} \tag{5.29}$$

$$A_{kl,m} \equiv \frac{\partial A_{kl}}{\partial x^m} - A_{rl}\begin{Bmatrix} r \\ km \end{Bmatrix} - A_{kr}\begin{Bmatrix} r \\ lm \end{Bmatrix} \tag{5.30}$$

$$\bar{A}_{rs,t} = A_{kl,m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^s}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^t} \tag{5.31}$$

对于一般的高阶张量，可写出如下的表达式：

$$A^{p_1\cdots p_s}_{q_1\cdots q_t,n} \equiv \frac{\partial A^{p_1\cdots p_s}_{q_1\cdots q_t}}{\partial x^n} + \sum_{a=1}^{s}\begin{Bmatrix} p_a \\ kn \end{Bmatrix}A^{p_1\cdots p_{a-1}kp_{a+1}\cdots p_s}_{q_1\cdots q_t}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{t}\begin{Bmatrix} l \\ q_\beta n \end{Bmatrix} A_{q_1\cdots q_{\beta-1}lq_{\beta+1}\cdots q_t}^{p_1\cdots p_s}$$

这个张量称为张量 $A_{q_1\cdots q_t}^{p_1\cdots p_s}$ 对 x^n 的协变导数。

下面研究两个特殊的张量，即克罗内克 δ_l^k 和里奇(Ricci)基本张量 g_{kl}，g^{kl} 的协变导数。

根据式(5.25)，有

$$\begin{aligned} \delta_{l,m}^k &= \frac{\partial \delta_l^k}{\partial x^m} + \begin{Bmatrix} k \\ rm \end{Bmatrix}\delta_l^r - \begin{Bmatrix} r \\ lm \end{Bmatrix}\delta_r^k \\ &= 0 + \begin{Bmatrix} k \\ lm \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k \\ lm \end{Bmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{5.32}$$

可见，在计算含有 δ_l^k 的项的协变导数时，克罗内克符号 δ_l^k 犹如一常数，它本身的协变导数为零。

下面证明里奇基本张量 g_{kl}，g^{kl} 的协变导数为零，即

$$g_{kl,m} = 0, \quad g^{kl}_{,m} = 0 \tag{5.33}$$

根据式(5.30)和式(5.2)，有

$$\begin{aligned} g_{kl,m} &= \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} - g_{rl}\begin{Bmatrix} r \\ km \end{Bmatrix} - g_{kr}\begin{Bmatrix} r \\ lm \end{Bmatrix} \\ &= \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} - g_{rl}g^{rs}[km,s] - g_{kr}g^{rs}[lm,s] \\ &= \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} - [km,l] - [lm,k] \\ &= \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k}\right) = 0 \end{aligned}$$

因为

$$g^{kr}g_{rl} = \delta_l^k$$

将上式对 x^m 求协变导数(求协变导数的规则见5.4节)，得

$$g^{kr}_{,m}g_{rl} + g^{kr}g_{rl,m} = 0$$

根据刚才的证明，可知第二项为零。即

$$g^{kr}_{,m}g_{rl} = 0$$

因为 $\det(g_{kl})\neq 0$，这组线性方程组的惟一解为

$$g^{kr}_{,m} = 0$$

至此，式(5.33)的两式证毕。

5.4 协变微分法规则

协变导数的演算遵循下列规则。

(1) **两张量之和(或差)的协变导数是它们的协变导数之和(或差)。**

$$(A^{kl}+B^{kl})_{,m}=A^{kl}_{,m}+B^{kl}_{,m} \tag{5.34}$$

将式(5.28)代入上式两端,即可证明等式的成立。

(2) **两张量的外积(或内积)的协变导数等于两项之和,每项是一个张量外乘(或内乘)另一张量的协变导数。**即

$$(A^{ij}B_{lm})_{,k}=A^{ij}_{,k}B_{lm}+A^{ij}B_{lm,k} \tag{5.35}$$

$$(A^{il}_{j}B^{m}_{l})_{,k}=A^{il}_{j,k}B^{m}_{l}+A^{il}_{j}B^{m}_{l,k} \tag{5.36}$$

证 (只证式(5.35))

$$\begin{aligned}(A^{ij}B_{lm})_{,k}&=\frac{\partial}{\partial x^k}(A^{ij}B_{lm})+A^{pj}\begin{Bmatrix} i \\ pk \end{Bmatrix}B_{lm}+A^{ip}\begin{Bmatrix} j \\ pk \end{Bmatrix}B_{lm}\\&\quad-A^{ij}B_{pm}\begin{Bmatrix} p \\ lk \end{Bmatrix}-A^{ij}B_{lp}\begin{Bmatrix} p \\ mk \end{Bmatrix}\\&=\left(\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^k}+A^{pj}\begin{Bmatrix} i \\ pk \end{Bmatrix}+A^{ip}\begin{Bmatrix} j \\ pk \end{Bmatrix}\right)B_{lm}\\&\quad+A^{ij}\left(\frac{\partial B_{lm}}{\partial x^k}-B_{pm}\begin{Bmatrix} p \\ lk \end{Bmatrix}-B_{lp}\begin{Bmatrix} p \\ mk \end{Bmatrix}\right)\\&=A^{ij}_{,k}B_{lm}+A^{ij}B_{lm,k}\end{aligned}$$

(3) **进行协变微分演算时,g_{kl},g^{kl}和δ^k_l 可以像常数一样提出来。**

例如

$$(g^{ij}A_{il})_{,m}=g^{ij}_{,m}A_{il}+g^{ij}A_{il,m}=g^{ij}A_{il,m}$$

5.5 不变微分算子

1. 梯度

由 1.9 节可知,标量场 Φ 的梯度可以表示为

$$\mathrm{grad}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x^k}\boldsymbol{g}^k=\nabla\Phi \tag{5.37}$$

式中,哈密顿算子

$$\nabla\equiv\boldsymbol{g}^k\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{5.38}$$

张量 $\boldsymbol{A}$ 的梯度定义为

$$\text{grad}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{,n}\boldsymbol{g}^{n} \tag{5.39}$$

若张量 $\boldsymbol{A}$ 为三阶混合张量 $A^{k}_{\cdot lm}$，则其梯度的分量为

$$(\text{grad}\boldsymbol{A})^{k}_{\cdot lmn}=A^{k}_{\cdot lm,n}=\nabla_{n}A^{k}_{\cdot lm} \tag{5.40}$$

式中符号∇_n表示协变微分算子。

2. 散度

根据式(1.77)和式(5.19)，矢量 $\boldsymbol{a}$ 的散度为

$$\begin{aligned}\text{div}\boldsymbol{a}&=\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}^{k}\cdot\frac{\partial}{\partial x^{k}}(a^{l}\boldsymbol{g}_{l})\\&=\boldsymbol{g}^{k}\cdot\boldsymbol{g}_{l}a^{l}_{,k}=a^{k}_{,k}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{k}}(\sqrt{g}a^{k})\end{aligned} \tag{5.41}$$

即逆变矢量 a^{l} 的散度

$$\text{div}a^{l}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{k}}(\sqrt{g}a^{k}) \tag{5.42}$$

$$\text{div}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}^{k}\cdot\frac{\partial}{\partial x^{k}}(a_{l}\boldsymbol{g}^{l})=g^{kl}\frac{\partial a_{l}}{\partial x^{k}} \tag{5.43}$$

即协变矢量 a_{l} 的散度

$$\text{div}a_{l}=g^{kl}\frac{\partial a_{l}}{\partial x^{k}} \tag{5.44}$$

张量的散度可以定义为一上标与代表协变微分的下标缩并后所得的结果。例如：$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{g}^{l}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x^{l}}=\boldsymbol{g}^{l}\cdot B^{kj}_{\cdot\cdot m,l}\boldsymbol{g}_{k}\boldsymbol{g}_{j}\boldsymbol{g}^{m}=B^{lj}_{\cdot\cdot m,l}\boldsymbol{g}_{j}\boldsymbol{g}^{m}$，或 $\boldsymbol{B}\cdot\nabla=\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x^{l}}\boldsymbol{g}^{l}=B^{kjm}_{\cdots,l}\cdot\boldsymbol{g}_{k}\boldsymbol{g}_{j}\boldsymbol{g}_{m}\boldsymbol{g}^{l}=B^{kjl}_{\cdots,k}\boldsymbol{g}_{k}\boldsymbol{g}_{j}$。

不过，散度都只是指张量中的最后一个上标与代表协变微分的下标缩并的情况，如

$$\begin{aligned}(\text{div}\boldsymbol{A})^{k_1\cdots k_p}{}_{l_1\cdots l_q}&=A^{k_1\cdots k_p m}{}_{l_1\cdots l_q,m}\\&=\nabla_{m}A^{k_1\cdots k_p m}{}_{l_1\cdots l_q}\end{aligned} \tag{5.45}$$

对于对称张量而言，被缩并的上标的位置并不重要。

例 5.2 设 $\boldsymbol{u}$ 为一矢量，Φ 为标量，试证

$$\text{div}\Phi\boldsymbol{u}=\Phi\text{div}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\Phi$$

证

$$\begin{aligned}\text{div}\,\Phi\boldsymbol{u}&=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{k}}(\Phi u^{k}\sqrt{g})=\frac{\Phi}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{k}}(u^{k}\sqrt{g})+u^{k}\frac{\partial\Phi}{\partial x^{k}}\\&=\Phi\text{div}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\Phi\end{aligned} \tag{5.46}$$

3. 旋度

由 1.11 节可知，矢量场 $\boldsymbol{u}$ 的旋度为

$$\text{curl}\boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{u} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = e_{ijk}\boldsymbol{e}_i \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

分量为

$$\frac{\partial u_p}{\partial x^q} - \frac{\partial u_q}{\partial x^p} = \left(\frac{\partial u_p}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} u_s\right) - \left(\frac{\partial u_q}{\partial x^p} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} u_s\right)$$

$$= u_{p,q} - u_{q,p} \tag{5.47}$$

用张量形式表示 N 维空间中矢量（一阶张量）$\boldsymbol{u}$ 的旋度为

$$\text{curl}\boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}^k \times \frac{\partial}{\partial x^k}(u_i \boldsymbol{g}^i)$$

$$= \boldsymbol{g}^k \times \boldsymbol{g}^l u_{l,k} = \varepsilon^{klm} u_{l,k} \boldsymbol{g}_m \tag{5.48}$$

4. 拉普拉斯算子

由式(1.92)可知

$$\nabla^2 \Phi = \text{div grad}\Phi = \text{div}\nabla\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j}\right)$$

$$= g^{ij}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^j}\right)_{,i} = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}\right) \tag{5.49}$$

若 Φ 与 Ψ 是两个标量，则

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\Phi\Psi) = \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} + \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$$

得

$$\nabla(\Phi\Psi) = \Phi\nabla\Psi + \Psi\nabla\Phi$$

两端取散度，得

$$\nabla^2(\Phi\Psi) = \Phi\nabla^2\Psi + 2\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi + \Psi\nabla^2\Phi \tag{5.50}$$

5.6 内禀微分

考虑沿曲线 $x^k = x^k(t)$ 的矢量场，如果矢量场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 是参数 t 的函数，且是可微的，则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^l}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t} \tag{5.51}$$

因为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^l}=u^k_{\cdot l}\boldsymbol{g}_k$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=u^k_{\cdot l}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}_k\equiv\frac{\delta u^k}{\delta t}\boldsymbol{g}_k \tag{5.52}$$

由式(5.18),可知

$$\frac{\delta u^k}{\delta t}=\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^l}+\left\{\begin{matrix}k\\lm\end{matrix}\right\}u^m\right)\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}$$

即

$$\frac{\delta u^k}{\delta t}=\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t}+\left\{\begin{matrix}k\\lm\end{matrix}\right\}u^m\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t} \tag{5.53}$$

称$\frac{\delta u^k}{\delta t}$为$u^k$对$t$的绝对导数或内禀导数。

对于标量,有

$$\frac{\delta \Phi}{\delta t}=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{5.54}$$

对于二阶张量$A^i_{\cdot j}$,有

$$\frac{\delta A^i_{\cdot j}}{\delta t}=\frac{\mathrm{d}A^i_j}{\mathrm{d}t}+\left\{\begin{matrix}i\\km\end{matrix}\right\}A^k_{\cdot j}\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}t}-\left\{\begin{matrix}m\\kj\end{matrix}\right\}A^i_{\cdot m}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} \tag{5.55}$$

对于高阶张量$A^{p_1p_2\cdots p_s}_{\cdot\cdot q_1q_2\cdots q_t}$,有

$$\frac{\delta A^{p_1p_2\cdots p_s}_{q_1q_2\cdots q_t}}{\delta t}=A^{p_1p_2\cdots p_s}_{\cdot\cdot q_1q_2\cdots q_t,k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} \tag{5.56}$$

可见,张量的内禀导数是和原来的张量同阶且同类型的张量。

容易定义高阶内禀导数,例如

$$\frac{\delta^2 A^i_j}{\delta t^2}=\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta A^i_j}{\delta t}\right)=\left(A^i_{j,k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\right)_{,l}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t} \tag{5.57}$$

内禀微分法一般是不交换的。

基本张量g_{kl},g^{kl}的内禀导数为零,即

$$\frac{\delta g_{kl}}{\delta t}=\frac{\delta g^{kl}}{\delta t}=0 \tag{5.58}$$

由定义可知,内禀导数的运算遵循协变微分法的运算法则。

若矢量$\boldsymbol{u}$又和t显式相关,即

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \tag{5.59}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\bigg|_x+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^l}\bigg|_t\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial u^k}{\partial t}+u^k_{,l}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}\right)\boldsymbol{g}_k$$

引入符号

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{D}u^k}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{g}_k \tag{5.60}$$

用下式定义矢量$\frac{\mathrm{D}u^k}{\mathrm{D}t}$为$u^k$的实质导数(material derivative)：

$$\frac{\mathrm{D}u^k}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial u^k}{\partial t}\bigg|_x+u^k_{,l}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t} \tag{5.61}$$

上式显然可以推广到高阶张量。例如，对于二阶张量$A^i_j(\boldsymbol{x},t)$而言，有

$$\frac{\mathrm{D}A^i_j}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial A^i_j}{\partial t}\bigg|_x+A^i_{j,k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\partial A^i_j}{\partial t}+\frac{\delta A^i_j}{\delta t} \tag{5.62}$$

从式(5.62)可以明显地看出内禀导数与实质导数的区别以及它们之间的联系。

因为基本张量g_{kl}，g^{kl}与t没有显式关系，故有

$$\frac{\mathrm{D}g_{kl}}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}g^{kl}}{\mathrm{D}t}=0 \tag{5.63}$$

同算子$\frac{\delta}{\delta t}$一样，算子$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$的运算遵循协变微分法的运算法则。

5.7 相对张量

定义 如果$p+q$阶张量$A^{k_1\cdots k_p}_{\cdots l_1\cdots l_q}$(权为$\alpha$)服从坐标变换律

$$\overline{A}^{r_1\cdots r_p}_{\cdots s_1\cdots s_q}=\left|\frac{\partial\overline{x}}{\partial x}\right|^{-\omega}\frac{\partial\overline{x}^{r_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial\overline{x}^{r_p}}{\partial x^{k_p}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial\overline{x}^{s_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_q}}{\partial\overline{x}^{s_q}}A^{k_1\cdots k_p}_{\cdots l_1\cdots l_q} \tag{5.64}$$

则这个张量称为权为ω的相对张量。

雅可比行列式

$$J=\det\left(\frac{\partial\overline{x}}{\partial x}\right)=\left|\frac{\partial\overline{x}}{\partial x}\right| \tag{5.65}$$

所以，式(5.64)可写成

$$\overline{A}^{r_1\cdots r_p}_{\cdots s_1\cdots s_q}=J^{-\omega}\frac{\partial\overline{x}^{r_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial\overline{x}^{r_p}}{\partial x^{k_p}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial\overline{x}^{s_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_q}}{\partial\overline{x}^{s_q}}A^{k_1\cdots k_p}_{\cdots l_1\cdots l_q} \tag{5.66}$$

指数ω是一个数。权为1的相对张量称为张量密度，权为零的张量称为绝对张量。前面各章中所讨论的张量，均属于绝对张量。

权为ω的相对标量、相对矢量(逆变矢量和协变矢量)、相对二阶混合张量分

别为

$$\bar{\Phi} = \left|\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right|^{-\omega} \Phi \tag{5.67}$$

$$\bar{A}^i = \left|\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right|^{-\omega} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j \tag{5.68}$$

$$\bar{A}_i = \left|\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right|^{-\omega} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} A_j \tag{5.69}$$

$$\bar{A}^i_j = \left|\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right|^{-\omega} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} A^k_l \tag{5.70}$$

可以看到，把雅可比行列式 J 的$(-\omega)$次方乘绝对张量，得相对张量；反之，用 J^ω 乘权为 ω 的相对张量，即得绝对张量。

$\sqrt{g}$是权为 1 的相对张量(张量密度)。

证

$$\bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} g_{pq}$$

两边取行列式

$$\bar{g} = \left|\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\right| \left|\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\right| g = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^2 g$$

所以

$$\sqrt{\bar{g}} = \left|\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right|^{-1} \sqrt{g} \tag{5.71}$$

物体的体积元 $\mathrm{d}V$ 是标量密度，即零阶张量密度的一个范例。这是因为体积元 $\mathrm{d}V$ 是按下述规律进行坐标变换的：

$$\mathrm{d}V(\bar{x}) = \left|\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right| \mathrm{d}V(x) \tag{5.72}$$

这就说明 $\mathrm{d}V$ 是权为(-1)的标量密度。

相对张量的加法、减法、外(内)乘、缩并等的运算与绝对张量的运算相同。

习 题

5.1 试证：(1) $[ij,k]=[ji,k]$；(2) $\left\{\begin{matrix} k \\ ij \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} k \\ ji \end{matrix}\right\}$。

5.2 试证 $[ij,k]=g_{kl}\left\{\begin{matrix} l \\ ij \end{matrix}\right\}$。

5.3 试证 $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=[ik,j]+[jk,i]$。

5.4 试证 $\dfrac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}=-g^{il}\begin{Bmatrix}j\\kl\end{Bmatrix}-g^{jl}\begin{Bmatrix}i\\kl\end{Bmatrix}$。

5.5 计算当 $i\neq j$ 时，$g_{ij}=0$ 空间里的第一种克里斯托费尔符号。

5.6 计算当 $i\neq j$ 时，$g_{ij}=0$ 空间里的第二种克里斯托费尔符号。

5.7 试求以下坐标系中的第二种克里斯托费尔符号：(1) 笛卡儿直角坐标系；(2) 柱坐标系；(3) 球坐标系。

5.8 试求以下坐标系中的第一种克里斯托费尔符号：(1) 笛卡儿直角坐标系；(2) 柱坐标系；(3) 球坐标系。

5.9 计算度量为 $\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}x^1)^2+[(x^2)^2-(x^1)^2](\mathrm{d}x^2)^2$ 时的第二种克里斯托费尔符号。

5.10 计算第二种克里斯托费尔符号，相应的度量为

(1) $\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}x^1)^2+(x^1)^2(\mathrm{d}x^2)^2+(x^1)^2\sin^2x^2(\mathrm{d}x^3)^2$；

(2) $\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}x^1)^2+G(x^1,x^2)(\mathrm{d}x^2)^2$，其中 G 是 x^1 和 x^2 的函数。

5.11 试证 $\dfrac{\partial^2 x^m}{\partial\bar{x}^j\partial\bar{x}^k}=\overline{\begin{Bmatrix}n\\jk\end{Bmatrix}}\dfrac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^n}-\dfrac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^j}\dfrac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^k}\begin{Bmatrix}m\\pq\end{Bmatrix}$。

5.12 试求下列张量相对于 x^q 的协变导数：(1) $g_{jk}A^k$；(2) A^jB_k；(3) $\delta^j_kA_j$。

5.13 试求下列张量相对于 x^q 的协变导数：(1) A_{jk}；(2) A^{jk}；(3) A^j_k；(4) $A^j{}_{\cdot kl}$；(5) $A^{jkl}{}_{\cdot\cdot\cdot mn}$。

5.14 试求下列张量相对于 x^q 的协变导数：(1) $A^{jk}{}_{\cdot\cdot l}$；(2) $A^{jk}{}_{\cdot\cdot lm}$；(3) $A^j{}_{\cdot klm}$；(4) $A^{jkl}{}_{\cdot\cdot\cdot m}$；(5) $A^{jk}{}_{\cdot\cdot lmn}$。

5.15 设 A_p 是张量，试证 $A_{p,q}\equiv\dfrac{\partial A_p}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix}s\\pq\end{Bmatrix}A_s$ 是张量。

5.16 设 A^p 是张量，试证 $A^p_{,q}\equiv\dfrac{\partial A^p}{\partial x^q}+\begin{Bmatrix}p\\qs\end{Bmatrix}A^s$ 是张量。

5.17 试证以下各项的协变导数为零：(1) g_{jk}；(2) g^{jk}；(3) δ^j_k。

5.18 试证

$$A^{ij}_{,j}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(A^{ij}\sqrt{g})+A^{jk}\begin{Bmatrix}i\\jk\end{Bmatrix}$$

$$A^{\cdot j}_{i,j}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(A^{\cdot j}_{i}\sqrt{g})-A^j_k\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}$$

5.19 试求 $A^j{}_{\cdot k}B^{lm}{}_{\cdot\cdot n}$ 相对于 x^q 的协变导数。

5.20 若 A_{ij} 为一协变矢量的旋度，试证

$$A_{ij,k}+A_{jk,i}+A_{ki,j}=0$$

5.21 试证 $(g_{jk}A^{km}{}_{\cdot\cdot n})_{,q}=g_{jk}A^{km}{}_{\cdot\cdot n,q}$。

5.22 利用关系式 $A^j=g^{jk}A_k$，从 A_k 的协变导数求 A^j 的协变导数。

5.23 在柱坐标系中，试用逆变矢量 A^p 的物理分量表示 A^p 的散度 $\mathrm{div}A^p$。

5.24 在球坐标系里，试用 A^p 的物理分量表示 $\mathrm{div}A^p$。

5.25 在以下坐标系里计算$\nabla^2\Phi$：(1) 柱坐标系；(2) 球坐标系。

5.26 试证 $\mathrm{div}A_j=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^r}(\sqrt{g}g^{rk}A_k)=\mathrm{div}A^j$。

5.27 设下列张量是 t 的可导函数，试求它们的内禀导数：(1) 不变量 Φ；(2) A^j；(3) $A^j_{\cdot k}$；(4) $A^{jk}_{\cdot\cdot lmn}$。

5.28 试求以下各项的内禀导数：(1) $g_{jk}A^k$；(2) $\delta^j_kA_j$；(3) $g_{jk}\delta^j_rA^r_p$。

5.29 设下列张量是 t 的可导函数，试求这些张量场的内禀导数：(1) A_k；(2) A^{jk}；(3) A_jB^k；(4) $\Phi A^j_{\cdot k}$(Φ 是不变量)。

5.30 试证$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g^{ij}A_iA_j)=2g^{ij}A_i\frac{\delta A_j}{\delta t}$。

5.31 设 $A^p_{\cdot q}$与 $B^{rs}_{\cdot\cdot t}$分别是权为 ω_1 与 ω_2 的相对张量，试证它们的内积与外积是权为 $\omega_1+\omega_2$ 的相对张量。

5.32 设 $A^{pq}_{\cdot\cdot r}$是权为 ω 的相对张量，试证 $g^{\frac{\omega}{2}}A^{pq}_{\cdot\cdot r}$是绝对张量。

5.33 试证两个权数相同的张量的和与差，是与原张量同类型、同权数的相对张量。

5.34 设 $A(p,q)B^{qs}_{\cdot\cdot r}=C^s_{\cdot pr}$，式中 $B^{qs}_{\cdot\cdot r}$是权为 ω_1 的任意相对张量，$C^s_{\cdot pr}$是一已知的权为 ω_2 的相对张量，试证 $A(p,q)$是权为 $\omega_2-\omega_1$ 的相对张量（这就是相对张量的商定律）。

第6章 黎曼空间的曲率

本章首先介绍黎曼-克里斯托费尔张量。然后介绍曲率张量、比安基(Bianchi)恒等式、里奇(Ricci)恒等式和曲率不变量。最后简单介绍爱因斯坦张量、黎曼曲率、平坦空间、常曲率空间、测地线、测地坐标和矢量的平行性等与相对论有关的基础数学知识。

6.1 黎曼-克里斯托费尔张量

由微积分理论知,在一般情况下,混合偏导数的次序是可以交换的,即

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial x^j}$$

人们很自然地会问:张量的二阶协变偏导数的次序是否在一般情况下也可以交换?若不能,在什么条件下才可以交换? 下面就研究绝对协变矢量 A_i 的二阶协变偏导数的次序交换问题。

由式(5.20),有

$$A_{i,j} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} A_r$$

再求一次协变导数,由式(5.30),有

$$A_{i,jk} = \frac{\partial}{\partial x^k}(A_{i,j}) - \begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix} A_{r,j} - \begin{Bmatrix} r \\ jk \end{Bmatrix} A_{i,r}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial A_i}{\partial x^r}\begin{Bmatrix} r \\ jk \end{Bmatrix} - \frac{\partial A_r}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix} - \frac{\partial A_r}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} \\
&\quad - A_r \frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} - A_r \begin{Bmatrix} r \\ sj \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ik \end{Bmatrix} + A_r \begin{Bmatrix} r \\ is \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ jk \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

互换指标 j 与 k 并将两式相减，得

$$
A_{i,jk} - A_{i,kj} = R^{r}_{\cdot ijk} A_r \tag{6.2}
$$

式中

$$
R^{r}_{\cdot ijk} \equiv \frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r \\ sj \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ik \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r \\ sk \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix} \tag{6.3}
$$

因 A_r 是一任意协变矢量，根据商定律，可知 $R^{r}_{\cdot ijk}$ 是一个四阶混合张量，它完全是由基本张量 g_{ij} 及其一、二阶偏导数构成的，称之为黎曼-克里斯托费尔张量，或称为具有黎曼度量 $g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ 的曲率张量。有人将符号 R^{r}_{ijk} 称为第二种黎曼符号。这个张量与矢量 A_i 的选取无关。

由式(6.2)可以看出，所有矢量的协变微分法可交换的必要与充分条件是黎曼-克里斯托费尔张量恒为零。这就是对本节开始提出的问题的回答。

由式(6.3)的定义，可知

$$
R^{r}_{\cdot ijk} = -R^{r}_{\cdot ikj} \tag{6.4}
$$

所以黎曼-克里斯托费尔张量对于指标 j 与 k 是反对称的。还可看出

$$
R^{r}_{\cdot ijk} + R^{r}_{\cdot jki} + R^{r}_{\cdot kij} = 0 \tag{6.5}
$$

对一任意逆变矢量 A^i 连续求两次协变导数，演算步骤与上述完全相同，可以得到

$$
A^{i}_{\cdot jk} - A^{i}_{\cdot kj} = -R^{i}_{\cdot rjk} A^r \tag{6.6}
$$

6.2 曲率张量

由

$$
R_{lijk} = g_{lr} R^{r}_{ijk} \tag{6.7}
$$

所确定的四阶协变张量 R_{lijk} 称为协变曲率张量。有人将符号 R_{lijk} 称为第一种黎曼符号。

将式(6.3)代入式(6.7)，得

$$
\begin{aligned}
R_{lijk} &= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(g_{lr}\begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(g_{lr}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix}\right) - \begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix}\frac{\partial g_{lr}}{\partial x^j} \\
&\quad + \begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix}\frac{\partial g_{lr}}{\partial x^k} + g_{lr}\begin{Bmatrix} r \\ sj \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ik \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r \\ sk \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix} g_{lr}
\end{aligned}
$$

利用式(5.5)，可得

$$R_{lijk}=\frac{\partial}{\partial x^j}[li,k]-\frac{\partial}{\partial x^k}[li,j]+[rl,k]\begin{Bmatrix}l\\ij\end{Bmatrix}-[rl,j]\begin{Bmatrix}r\\ik\end{Bmatrix}$$

再将式(5.1)与式(5.2)代入并进行简化，得

$$R_{lijk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial x^i\partial x^j}+\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^l\partial x^k}-\frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^i\partial x^k}-\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l\partial x^j}\right)+g_{rs}\left(\begin{Bmatrix}s\\lk\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}r\\ij\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}s\\lj\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}r\\ik\end{Bmatrix}\right) \tag{6.8}$$

由式(6.8)易见下列关系：

$$\left.\begin{aligned}R_{lijk}&=-R_{iljk}\\R_{lijk}&=-R_{likj}\\R_{lijk}&=R_{jkli}\end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

于是

$$R_{iijk}=R_{lijj}=0 \tag{6.10}$$

将式(6.5)乘以 g_{lr}，并对 r 求和，得恒等式

$$R_{lijk}+R_{ljki}+R_{lkij}=0 \tag{6.11}$$

在 N 维空间里，曲率张量不为零的独立分量的数目为

$$K=\frac{1}{12}N^2(N^2-1) \tag{6.12}$$

推算的方法如下。

从式(6.10)看出，当 $l=i$ 或 $j=k$ 时，分量为零。于是；不论其正负号，分量可以归为三类：R_{lili}，R_{lilk} 和 R_{lijk}，其中 l,i,j 和 k 彼此不同。R_{lili} 类型的分量个数同 l 和 i 的组合数相同，即有 $\frac{1}{2}N(N-1)$ 个。R_{lilk} 类型的分量个数与选定 l 后 i 和 k 的组合数相同，即有 $\frac{1}{2}N(N-1)(N-2)$ 个。l,i,j,k 的组合数是 $\binom{N}{4}=\frac{1}{24}N(N-1)(N-2)\cdot(N-3)$。除加减号以外，当 l 同 i,j 或 k 配合后，R_{lijk} 就确定了。R_{lijk} 类型的分量有 $\frac{1}{8}N(N-1)(N-2)(N-3)$ 个。式(6.11)类型的独立方程有 $\binom{N}{4}=\frac{1}{24}N\cdot(N-1)(N-2)(N-3)$ 个。所以 R_{lijk} 不为零的独立分量的数目为

$$\begin{aligned}K&=\frac{1}{2}N(N-1)+\frac{1}{2}N(N-1)(N-2)+\frac{1}{8}N(N-1)(N-2)(N-3)\\&\quad-\frac{1}{24}N(N-1)(N-2)(N-3)\\&=\frac{1}{12}N^2(N^2-1)\end{aligned} \tag{6.13}$$

当 $N=2,3,4$ 时，R_{lijk} 不为零的独立分量数目 $K=1,6,20$。例如 $N=2$ 时，R_{lijk} 不为零的独立分量只有一个，即 R_{1212}。当 $N=3$ 时，独立的 R_{lijk} 是 R_{1212}，R_{1313}，R_{2323}，R_{1213}，R_{2123}，R_{3132} 6 个。

6.3 比安基恒等式

选取以 P 点为极点的测地坐标(又称短程坐标,见6.8节)x^i,将式(6.3)对 x^l 作协变微分,注意到克里斯托费尔符号在极点 P 为零,得知在极点有

$$R^r_{ijk,l} = \frac{\partial}{\partial x^l}(R^r_{ijk}) = \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^j}\begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix} - \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix}$$

轮换指标 j,k 和 l,得两个类似的方程。将三式相加,等式右边各项完全相消,于是有

$$R^r_{ijk,l} + R^r_{ikl,j} + R^r_{ilj,k} = 0 \tag{6.14}$$

因为式(6.14)中各项都是张量的分量,所以这个方程式对所有坐标系以及所有点都成立,即为全黎曼空间 V_n 的恒等式,称为比安基(Bianchi)恒等式。

对式(6.14)内乘以 g_{hr},注意到 g_{hr} 的协变微分为零,得另一形式的比安基恒等式:

$$R_{hijk,l} + R_{hikl,j} + R_{hilj,k} = 0 \tag{6.15}$$

6.4 里奇张量与曲率不变量

由6.1节与6.2节的分析,好像黎曼-克里斯托费尔张量有三种不同的缩并途径。但是,因 R_{lijk} 对 l 和 i 是反对称的,有 $R^r_{rjk} = g^{rh} R_{hrjk} = 0$,由式(6.4)看出 $R^r_{\cdot ijr} = -R^r_{\cdot irj}$,因此只考虑下列缩并得

$$R_{ij} = R^r_{ijr} = g^{rh} R_{hijr} \tag{6.16}$$

式(6.16)定义的 R_{ij} 称为里奇(Ricci)张量。

由式(6.3)可知

$$R_{ij} = R^r_{\cdot ijr} = \frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} r \\ ir \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^r}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r \\ sj \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ir \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r \\ sr \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix}$$

因为

$$\begin{Bmatrix} i \\ ij \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{g}\,\frac{\partial g}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\{\lg \sqrt{g}\}$$

于是得

$$R_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\lg\sqrt{g} - \frac{\partial}{\partial x^r}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r \\ sj \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ ir \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^s}\lg\sqrt{g} \tag{6.17}$$

如果 g 是负数,则 $\lg\sqrt{g}$ 应换成 $\lg\sqrt{-g}$。由上式可看出,R_{ij} 是对称的。

里奇张量还可写成如下形式:

$$R_{ij}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x^j} & \dfrac{\partial}{\partial x^r}\\ \begin{Bmatrix}r\\ ij\end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix}r\\ ir\end{Bmatrix}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\begin{Bmatrix}r\\ sj\end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix}r\\ sr\end{Bmatrix}\\ \begin{Bmatrix}s\\ ij\end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix}s\\ ir\end{Bmatrix}\end{vmatrix} \tag{6.18}$$

式中

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\{\lg\sqrt{g}\}=\begin{Bmatrix}r\\ ir\end{Bmatrix}$$

因为 R_{ij} 是对称张量，所以有 $\frac{1}{2}N(N+1)$ 个独立分量，在四维空间中，爱因斯坦在广义相对论里，称 $R_{ij}=0$ 为自由空间的引力场方程，且称

$$R=g^{ij}R_{ij} \tag{6.19}$$

为曲率不变量。

在所有点都有 $R_{ij}=Ig_{ij}$ 的空间(其中 I 是一不变量)，称为爱因斯坦空间。内乘以 g^{ij}，得 $R=NI$。因此，对于爱因斯坦空间，有

$$R_{ij}=\frac{1}{N}Rg_{ij} \tag{6.20}$$

式(6.20)表示爱因斯坦空间的一种特性，R 为空间的标量曲率。

由于式(6.9)，比安基恒等式式(6.15)可改写为

$$R_{hijk,l}-R_{ihkl,j}-R_{hijl,k}=0$$

将上式内乘以 $g^{hk}g^{ij}$，并应用式(6.16)和式(6.19)，得

$$R_{,l}-g^{ij}R_{il,j}-g^{hk}R_{hl,k}=0$$

可以写成

$$R_{,l}=2g^{ij}R_{il,j} \tag{6.21}$$

6.5 爱因斯坦张量和黎曼曲率

1. 爱因斯坦张量

爱因斯坦张量的定义是

$$G^{p}_{\cdot q}=g^{pr}R_{ir}-\frac{1}{2}R\delta^{p}_{\cdot q} \tag{6.22}$$

将它对 x^p 作协变微分，有

$$G^{p}_{\cdot q,p}=g^{pr}R_{ir,p}-\frac{1}{2}R_{,p}\delta^{p}_{\cdot q}=g^{pr}R_{ir,p}-\frac{1}{2}R_{,q}$$

由式(6.21)，可得

$$G^{p}_{\cdot q,p}=0 \tag{6.23}$$

它表明爱因斯坦张量的散度为零。这个恒等式在广义相对论中是很重要的。当

$N=4$时，在相对论理论中这个方程表示关于动量与能量不变的定理。

2. 黎曼曲率

设 P 为空间 V_n 的一点，从过 P 点的任何两个矢量 A^p 和 B^q 可以建立不变量 $R_{hijk}A^hA^jB^iB^k$。下面我们来研究如果把矢量 A^p 与 B^q 换成两线性组合

$$X^p = \lambda A^p + \mu B^p, \quad Y^q = \rho A^q + \tau B^q$$

当 λ,μ,ρ 和 τ 均为不变量时，将会得出什么结果？利用式(6.9)直接计算，可得

$$R_{hijk}X^hX^jY^iY^k = (\lambda\tau - \rho\mu)^2 R_{hijk}A^hA^jB^iB^k$$

表达式 $R_{hijk}A^hA^jB^iB^k$ 对于坐标变换是不变量，在矢量的线性变换下，它几乎是一不变量。为了得到在矢量的线性变换下几乎不变的表达式，计算

$$\begin{aligned}
&(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij})X^hX^jY^iY^k \\
&= (\lambda A_j + \mu B_j)(\lambda A^j + \mu B^j)(\rho A_k + \tau B_k)(\rho A^k + \tau B^k) \\
&\quad - (\lambda A_k + \mu B_k)(\rho A^k + \tau B^k)(\lambda A_i + \mu B_i)(\rho A^i + \tau B^i) \\
&= (e_A\lambda^2A^2 + e_B\mu^2B^2 + 2\lambda\mu\cos\theta AB)(e_A\rho^2A^2 + e_B\tau^2B^2 + 2\rho\tau\cos\theta AB) \\
&\quad - [e_A\lambda\rho A^2 + e_B\mu\tau B^2 + (\lambda\tau + \rho\mu)\cos\theta AB]^2 \\
&= (\lambda\tau - \mu\rho)^2(e_Ae_B - \cos^2\theta)A^2B^2 \\
&= (\lambda\tau - \mu\rho)^2(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij})A^hA^jB^iB^k
\end{aligned}$$

其中 θ 是矢量 A^p 和 B^q 之间的夹角。因此，当确定式(6.24)的两个矢量换成任何线性组合后，

$$K = \frac{R_{hijk}A^hA^jB^iB^k}{(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij})A^hA^jB^iB^k} \tag{6.24}$$

是在这一点的不变量。这个不变量称为空间 V_N 中同矢量 A^p 和 B^q 相伴的黎曼曲率。注意：如果矢量 A^p 和 B^q 是正交单位矢量，则 K 的分母等于1。

在二维空间 V_2 的任一点上，只存在两个独立矢量。因此 V_2 的黎曼曲率在每一点是惟一确定的。选择分量分别为(1,0)和(0,1)的两个矢量就容易得到黎曼曲率的值，于是有

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{R_{1212}}{g} \tag{6.25}$$

6.6　平坦空间

如果在空间的每一点上有 $K=0$，就称这个空间为平坦空间。从式(6.24)可知，空间是平坦的必要与充分条件是：对于所有的矢量 A^p 和 B^q，有

$$R_{hijk}A^hA^jB^iB^k=0$$

由式(6.9),有

$$R_{hijk}+R_{jihk}+R_{jkhi}+R_{hkji}=0$$

于是

$$R_{hijk}+R_{hkji}=0$$

互补 i 和 j,得

$$R_{hjik}+R_{hkij}=0$$

把后一方程乘 2 再与前一方程相加,得

$$2R_{hjik}+2R_{hkij}+R_{hijk}+R_{hkji}=0$$

可以写成

$$3R_{hjik}+R_{hjki}+R_{hkij}+R_{hijk}=0$$

由式(6.11)可得

$$R_{hjik}=0$$

反之,设 $R_{hjik}=0$,则显然有 $K=0$。因此空间 V_N 为平坦空间的必要与充分条件是黎曼-克里斯托费尔张量恒等于零。

由式(6.7)可知,当 $R_{hijk}=0$ 时,必有 $R^{r}{}_{.ijk}=0$。

由式 (6.2) 可知,在平坦空间里,逆变矢量的二阶协变偏导数的次序是可以交换的,当然,也可说明张量的二阶协变偏导数的次序是可以交换的。

平坦空间最常见的例子是欧几里得空间。用直角坐标时,二维欧几里得的度量是 $ds^2=dx^2+dy^2$,而用极坐标时,其度量是 $ds^2=dr^2+r^2d\rho^2$。

6.7 常曲率空间

下面考查另一种特殊空间——常曲率空间。在这样的空间里,每一点的黎曼曲率与相伴矢量 A^p 和 B^q 的选择无关。由式(6.24)可知,其必要与充分条件是:对于所有的矢量 A^p 和 B^q,

$$[K(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij})-R_{hijk}]A^hA^jB^iB^k=0$$

作类似于上节的计算,可以证明这个条件可化为

$$R_{hijk}=K(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij}) \tag{6.26}$$

这里 K 是坐标 x^i 的函数,或一常数。对 x^l 作协变微分,并注意到 g_{ij} 各量的协变导数为零,得

$$R_{hijk,l}=K_{,l}(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij})$$

将此式同其由指标 j,k,l 轮换所得的两式相加,根据比安基恒等式(式 6.15),得

$$K_{,l}(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij})+K_{,j}(g_{hk}g_{il}-g_{hl}g_{ik})+K_{,k}(g_{hl}g_{ij}-g_{hj}g_{il})=0$$

内乘以 g^{hj}，并注意 $g^{hj}g_{hr}=\delta^j_r$，得

$$K_{,l}g_{ik}-K_{,k}g_{il}=0$$

因为上式对 i 由 1 至 N 的所有值都成立，则

$$K_{,l}=K_{,k}=0$$

K 对 x^l 的协变导数为零，即表示黎曼曲率对全空间为常数，可见式(6.26)为空间具有常数曲率的必要与充分条件。以上证明的结论即为舒尔(Schur)定理：若对于空间所有的点，黎曼曲率与定向方法(即与矢量 A^p 和 B^q)的选择无关，则此曲率对全空间为一常数。

半径为 a 的球面是常曲率空间。用球坐标时，其度量为 $ds^2=a^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\psi^2)$。因为 $R_{1212}=a^2\sin^2\theta$，根据式(6.25)，可见球面是具有常曲率 $1/a^2$ 的曲面。

6.8 测地线与测地坐标

1. 测地线

在三维欧几里得空间里，直线是两点间距离最短的路线。下面将这一基本概念推广到黎曼空间。在变分法中，用求泛函极值的方法，求得测地线的微分方程，读者早已熟知。这里我们还是从基本的原理推导测地线的微分方程组。

设 $\mathscr{L}$ 是连接两定点 P_0 与 P_1 的曲线 $x^i=x^i(t)$，参数 t 在 P_0 与 P_1 的值分别为 t_0 与 t_1，于是 P_0 与 P_1 间沿曲线的距离 s 由下式确定：

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{eg_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}dt \tag{6.27}$$

设取沿 $\mathscr{L}$ 连续变化的任意微小矢量，则方程 $\bar{x}^i=x^i+\delta x^i$ 确定一条与 $\mathscr{L}$ 邻近的曲线 $\bar{\mathscr{L}}$。加上在 P_0 和 P_1 处 $\delta x^2=0$ 的条件，这就意味着曲线 $\bar{\mathscr{L}}$ 总是连接着 P_0 和 P_1 两定点。沿 $\bar{\mathscr{L}}$ 从 P_0 到 P_1 的距离 $\bar{s}$ 由下式给出：

$$\bar{s}=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{eg_{ij}(\bar{x})\frac{d\bar{x}^i}{dt}\frac{d\bar{x}^j}{dt}}dt$$

其中，$g_{ij}(\bar{x})$ 已是 $\bar{x}^i$ 的函数。

$$\begin{aligned}g_{ij}(\bar{x})\frac{d\bar{x}^i}{dt}\frac{d\bar{x}^j}{dt}&=\left(g_{ij}+\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\delta x^k\right)\left(\frac{dx^i}{dt}+\frac{d(\delta x^i)}{dt}\right)\left(\frac{dx^j}{dt}+\frac{d(\delta x^j)}{dt}\right)\\&=g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}+2g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{d(\delta x^i)}{dt}+\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\delta x^k\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\end{aligned}$$

以上展开式中已略去了高于一阶的项。于是

$$\sqrt{eg_{ij}(\bar{x})\frac{d\bar{x}^i}{dt}\frac{d\bar{x}^j}{dt}}$$

$$= \sqrt{eg_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\left\{1 + \frac{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{d(\delta x^j)}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\delta x^k\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\right\}$$

因此从曲线 $\mathscr{L}$ 变到曲线 $\bar{\mathscr{L}}$ 时，曲线长度的变化 δs 是

$$\delta s = \bar{s} - s = \int_{t_0}^{t_1}\frac{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{d(\delta x^j)}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\delta x^k\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}{\sqrt{eg_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}}dt$$

现在取沿 $\mathscr{L}$ 的弧长 s 为参数来简化方程，即

$$\delta s = \int_{s_0}^{s_1}\left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{d(\delta x^j)}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\delta x^k\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right]ds$$

其中，s_0 和 s_1 分别是对应于点 P_0 和点 P_1 的 s 值，用分部积分法得

$$\delta s = \left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right]_{s_0}^{s_1} - \int_{s_0}^{s_1}\delta x^j\left[\frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\right]ds$$

已积出的部分等于零，因为在 P_0 和 P_1 处 δx^j 是零。还有

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\right) = g_{ij}\frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$

$$= g_{ij}\frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$

因此

$$\delta s = -\int_{s_0}^{s_1}\delta x^j\left[g_{ij}\frac{d^2x^i}{ds^2} + [ik,j]\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\right]ds$$

变分 δx^j 是任意的，所以曲线 $\mathscr{L}$ 为测地线的必要与充分条件是

$$g_{ij}\frac{d^2x^i}{ds^2} + [ik,j]\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{6.28}$$

内乘以 g^{jl}，得逆变形式

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx^l}{ds}\right) \equiv \frac{d^2x^l}{ds^2} + \begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{6.29}$$

方程式(6.28)或式(6.29)是测地线的微分方程组。根据微分方程理论知，如果在任一点给定 x^i 和 dx^i/ds 的初值，方程就有惟一解 $x^i = x^i(s)$。其几何意义是，按给定方向通过空间任一点，有惟一的测地线。上面我们曾经用通过两点的曲线定义测地线，这样的测地线可能不是惟一的，除非这两点彼此非常非常接近。例如通过球面上的某一点按给定的方向，则有惟一的测地线，而通过球面上同一直径两端点，则有无数根测地线，因为通过这两点的所有大圆都是测地线。

对于欧几里得空间，采用笛卡儿直角坐标，克里斯托费尔符号都为零，因此测地线的方程是 $d^2x^l/ds^2 = 0$，其解是 $x^l = A^l s + B^l$，这里 A^l 与 B^l 都是常矢量，也就是说，

测地线是直线。

2. 零测地线

在三维欧几里得空间的直角坐标系里，两点间的距离为

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

这时，$ds^2 \geqslant 0$，这种空间称为真欧氏空间。如果 ds^2 可正、可负、可为零，则称为伪欧氏空间。伪欧氏空间与通常的观念不同，即两点的距离、矢量的长度可以是实的，也可以是虚的。为此，引入因子 e：

$$ds^2 = eg_{ij}dx^i dx^j$$

e 取 $+1$ 或 -1，以保证在 N 维空间里，ds^2 为正数，ds 为实数。

如果曲线 $x^i(t)$ 以 t 为参数，则两点 $x^i(t_1)$ 和 $x^i(t_0)$ 的曲线长度为

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{eg_{ij}dx^i dx^j} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{eg_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}dt$$

特别地，如果曲线 $x^i(s)$ 以 s 为参数，则从某点算起的曲线长度 s 为

$$s = \int_{s_0}^{s} \sqrt{eg_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}}ds$$

很明显，根号内的值必为 1，除非是零曲线。因此

$$g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = e \tag{6.30}$$

微分得

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right) = \frac{\delta}{\delta s}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right) = 2g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx^j}{ds}\right)$$

因此由式(6.29)可知，在测地线上所有各点，不变量 $\frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right)$ 为零。所以沿测地线，指示数 e 不会突然改变，否则其导数不为零。因此若在测地线上任一点切矢量不是零矢量，则它在任何其他点也不可能是零矢量。另一方面，如果起始方向的切矢量是零矢量，则曲线是零曲线，当然也就不能用弧距离作为参数。这时令零曲线 $x^i = x^i(t)$ 作为方程

$$\frac{d^2x^l}{ds^2} + \begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0 \tag{6.31}$$

的解，这个解就是零测地线。注意，不是所有的零曲线都是零测地线。

3. 测地坐标

是否有这样的坐标系存在，在这个坐标系里的某一特殊点上，所有的克里斯托费尔符号均为零？回答是肯定的。下面将证明有这样的坐标系存在，这个坐标系就是所谓的测地坐标系，极点是一特殊点，在测地坐标系的极点，所有的克里斯托费尔符

号均为零。

考虑一般的坐标系 x^i，它们在某一特定点 P_o 的值是 $x^i_{(o)}$，并用方程

$$\bar{x}^i = x^i - x^i_{(o)} + \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} i \\ mn \end{matrix}\right\}_{(o)} (x^m - x^m_{(o)})(x^n - x^n_{(o)}) \tag{6.32}$$

引入新坐标系 $\bar{x}^i$。式中(o)表示点 P 在 o 点的取值，o 用小圆括号括起来的意思表示没有张量的意义，求和约定对它不适用。对 x^j 微分，得

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \delta^i_j + \left\{\begin{matrix} i \\ jn \end{matrix}\right\}_{(o)} (x^n - x^n_{(o)}) \tag{6.33}$$

因为 $\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right)_{(o)} = \delta^i_j$，所以雅可比行列式 $\left|\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right)_{(o)}\right| \neq 0$，这表明在 P_o 的近旁，变换式(6.32)是容许的。将式(6.33)内乘以$\partial x^j/\partial \bar{x}^k$，得

$$\delta^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} + \left\{\begin{matrix} i \\ jn \end{matrix}\right\}_{(o)} (x^n - x^n_{(o)}) \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}$$

将它对 $\bar{x}^k$ 微分，有

$$0 = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^h} \left\{\begin{matrix} i \\ jn \end{matrix}\right\}_{(o)} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^h} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} + \left\{\begin{matrix} i \\ jn \end{matrix}\right\}_{(o)} (x^n - x^n_{(o)}) \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^h}$$

于是，在 P_o 点有

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\right)_{(o)} = \delta^i_k; \quad \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^h}\right)_{(o)} = -\left\{\begin{matrix} i \\ jn \end{matrix}\right\}_{(o)} \delta^n_h \delta^j_k = -\left\{\begin{matrix} i \\ kh \end{matrix}\right\}_{(o)}$$

将它们代入第二种克里斯托费尔符号变换关系式：

$$\overline{\left\{\begin{matrix} p \\ lm \end{matrix}\right\}} = \left\{\begin{matrix} s \\ ij \end{matrix}\right\} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m}$$

得

$$\overline{\left\{\begin{matrix} p \\ lm \end{matrix}\right\}}_{(o)} = \left\{\begin{matrix} s \\ ij \end{matrix}\right\}_{(o)} \delta^p_s \delta^i_l \delta^j_m - \delta^p_j \left\{\begin{matrix} j \\ lm \end{matrix}\right\}_{(o)}$$

即

$$\overline{\left\{\begin{matrix} p \\ lm \end{matrix}\right\}}_{(o)} = 0$$

因此，总可以选择称作*测地坐标系*的特殊坐标系，使得克里斯托费尔符号在称作*极点*的任何指定点等于零。变换式(6.32)不是获得测地坐标的惟一方法，我们已证明了这样的坐标系的存在，且在这个坐标系里 $\bar{x}^i_{(o)} = 0$，这个点称为极点，又是坐标原点。

测地坐标系是一个十分重要的特殊坐标系，其原因是：在测地坐标系的原点，所有的克里斯托费尔符号为零，所以在这一点的协变导数化为相应的偏导数。

在第 3 章里已指出，如果在某一坐标系里张量为零，则它在每个坐标系里都是零。如果先在测地坐标系的极点得以证明，则运算往往简单得多。

6.9 矢量的平行性

在欧几里得空间里，对于笛卡儿直角坐标来说，如果矢量 A_i 的分量保持常数，则可在整个空间里平行地移栽而得到 A_i 的平行矢量场，且可以用 $\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}=0$ 或 $\frac{\partial A_i}{\partial x^j}=0$ 解析地表示。因为在欧几里得空间里，对于笛卡儿直角坐标系来说，所有的克里斯托费尔符号为零，可以把这两组方程等价地分别写成张量形式 $\frac{\delta A}{\delta t}=0$ 或 $A_{i,j}=0$。这样，为把平行性概念推广到黎曼空间提供了两种途径。但是偏微分方程组 $A_{i,j}=0$ 一般是不相容的，所以按第二种途径推广是不可能的。

内禀导数只能沿曲线来定义，所以按第一种办法推广平行性概念时，只能沿一曲线定义平行性。即如果矢量 A_i 是微分方程组

$$\frac{\delta A^i}{\delta t} \equiv \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} - \begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix} A_l \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{6.34}$$

的一组解，则 A_i 沿曲线 $x^i=x^i(t)$ 构成平行矢量场。

这些方程形成 N 个一阶微分方程的方程组，因此如果在曲线的任一点给定矢量 A_i，则便在曲线的所有其他各点惟一地确定了这个矢量。也可以说，通过沿曲线的平行传播，从一已知矢量可获得一平行矢量场。

因为

$$\frac{\delta A^i}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}(g^{ij}A_j) = g^{ij}\frac{\delta A_j}{\delta t}$$

所以，可以把沿曲线的平行性条件写成逆变形式

$$\frac{\delta A^i}{\delta t} \equiv \frac{\mathrm{d}A^i}{\mathrm{d}t} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} A^j \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{6.35}$$

由式(6.29)可知，单位切矢量形成沿测地线的平行矢量场。

平行矢量场所有矢量的长度保持不变。证明如下。

矢量 A^i 的长度由 $(A)^2=e_{(A)}g_{ij}A^iA^j$ 给定。微分后有

$$2A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e_{(A)}g_{ij}A^iA^j) = \frac{\delta}{\delta t}(e_{(A)}g_{ij}A^iA^j)$$

$$= 2e_{(A)}g_{ij}\frac{\delta A^i}{\delta t}A^j$$

如果 A^i 形成一平行矢量场，则此方程便化为

$$A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 0$$

可见矢量场各矢量长度不变。

设矢量 A^i 与 B^i 之间的夹角 θ 由 $AB\cos\theta=g_{ij}A^iB^j$ 给定。微分后得

$$AB\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\theta)+\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}B+A\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right)\cos\theta=g_{ij}\left(\frac{\delta A^i}{\delta t}B^j+A^i\frac{\delta B^j}{\delta t}\right)$$

当 A^i 与 B^j 都形成平行矢量场时，只要矢量 A^i 与 B^j 都不是零矢量，这个方程化为 $\frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}t}=0$。就是说，当两非零矢量沿同一曲线平行移栽时，它们之间的夹角保持不变。

把矢量从 P 点通过平行移栽到 Q 点所得到的矢量，依赖于连接 P 与 Q 的曲线。因此绕一闭曲线的平行移栽，不一定能重返到原来的矢量。如图 6.1 所示，在平面内沿圆周移栽的两平行矢量场，当平面卷成曲面时，A^i 与 B^j 从 P 到 Q 平行移栽后，都不能重返到原来的矢量。

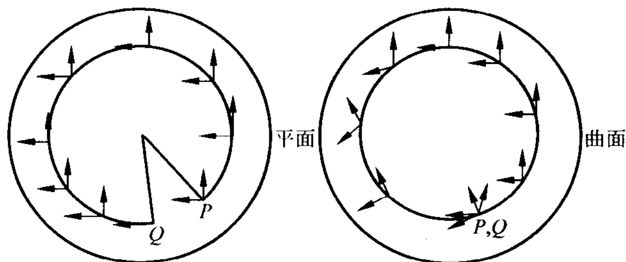


图 6.1

习　题

6.1 试证 $R^l_{ijk}+R^l_{jki}+R^l_{kij}=0$。

6.2 试证 $R^l_{ljk}=0$。

6.3 若 V_N 的基本张量 $g_{ii}=U^{-2}$，$g_{ij}=0(i\neq j)$，其中 U 为坐标的函数，若 h,i,j,k 不互等，试验证：

$$[ki,j]=0,\qquad \begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}=0$$

$$[ii,j]=-\frac{1}{U^3}\frac{\partial U}{\partial x^j},\qquad \begin{Bmatrix}i\\ij\end{Bmatrix}=-\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial x^j}$$

$$[ji,i]=\frac{1}{U^3}\frac{\partial U}{\partial x^j},\qquad \begin{Bmatrix}j\\ii\end{Bmatrix}=\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial x^j}$$

$$[ii,i]=-\frac{1}{U^3}\frac{\partial U}{\partial x^i},\qquad \begin{Bmatrix}i\\ii\end{Bmatrix}=-\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial x^i}$$

6.4 用6.3题证明

$$R_{hiik}=-\frac{1}{U^3}\frac{\partial^2 U}{\partial x^h \partial x^k}$$

及

$$R_{hiih}=\frac{1}{U^4}\sum_k\left(\frac{\partial U}{\partial x^k}\right)^2-\frac{1}{U^3}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^{j2}}+\frac{\partial^2 U}{\partial x^{h2}}\right)$$

6.5 若6.3题中函数U为

$$U=1+\frac{1}{4}K[(x^1)^2+(x^2)^2+\cdots+(x^N)^2]$$

式中，K为常数，试证它满足常曲率空间条件：

$$R_{hijk}=K(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij})$$

6.6 若6.3题中函数U为

$$U^2=-K(x^i)^2$$

其中，K为一负常数，试证它也满足常曲率空间条件。

6.7 设V_2的线元素是$ds^2=du^2+Gdv^2$，其中G是u与v的函数，试证

$$R_{1212}=-G\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}。$$

6.8 对正交参数曲线系($g_{12}=0$)的空间V_2，试证

$$R_{12}=0$$

$$R_{11}g_{22}=R_{22}g_{11}=R_{1221}$$

$$R=g^{ij}R_{ij}=\frac{R_{1221}}{g_{11}g_{22}}$$

于是得

$$R_{ij}=\frac{1}{2}Rg_{ij}$$

所以每一V_2都是爱因斯坦空间。

6.9 对于空间V_2，求证$gR_{ij}=-g_{ij}R_{1212}$，$gR=-2R_{1212}$，因此证明每个V_2都是爱因斯坦空间。

6.10 对坐标曲面的三重正交系的空间V_3，试证：若h,i,j不相等，则

$$R_{ij}=\frac{1}{g_{hh}}R_{ihhj}$$

$$R_{hh}=\frac{1}{g_{ii}}R_{hiih}+\frac{1}{g_{jj}}R_{hjjh}$$

$$R=\sum_{i,j}\frac{1}{g_{ii}g_{jj}}R_{ijji}$$

$$R_{hiih}-g_{hh}R_{ii}-g_{ii}R_{hh}+\frac{1}{2}Rg_{hh}g_{ii}=0$$

6.11 设三维平坦空间的度量是 $f(r)[(dx^1)^2+(dx^2)^2]$，其中 $(r)^2=(x^1)^2+(x^2)^2$，试证 $f(r)=c(r)^k$，其中 c 与 k 是常数。

6.12 试证爱因斯坦空间 V_3 有常数曲率。

6.13 试证常曲率空间是爱因斯坦空间。

6.14 试证在欧几里得空间 V_4 里，超球面

$$x^1 = c\sin\theta\sin\varphi\sin\psi, \quad x^2 = c\sin\theta\sin\varphi\cos\psi$$

$$x^3 = c\sin\theta\cos\varphi, \quad x^4 = c\cos\theta$$

是具有常曲率 $1/c^2$ 的空间 V_3。

第 7 章 张量分析在变形体力学中的应用

变形体力学是应用张量的最重要领域。本章对张量在变形体力学中的应用进行了介绍。首先对物质坐标和空间坐标的概念进行了阐述，对于应力张量、应变张量这两种应用最广泛的张量进行了推导和分析，通过介绍位移梯度张量及其极分解、变形速度张量、介质中曲面的移动和传播等内容，使读者能够深刻领会变形体力学的分析方法。最后一节中分析和讨论了无粘性流体、牛顿粘性流体和理想弹性固体这三种物质用张量表示的本构方程。

7.1 物质坐标和空间坐标

每个连续介质质点，可用一组数(a_1,a_2,a_3)标识，此(a_1,a_2,a_3)称为物质坐标，不同的物质坐标代表不同的质点。物质坐标最简单的取法就是取(a_1,a_2,a_3)为该连续介质质点在初始时刻的空间位置。物质坐标也称为拉格朗日(Lagrange)变量。把连续介质的各物理量，看成是物质坐标和时间 t 的函数，并研究这些函数的变化规律，这样的描述和研究方法称为拉格朗日方法。

同一个质点(a_1,a_2,a_3)，在不同时刻将处于不同的空间位置(x_1,x_2,x_3)。空间坐标(x_1,x_2,x_3)也称为欧拉(Euler)变量。把连续介质的各物理量，看成是空间坐标(x_1,x_2,x_3)和时间 t 的函数，并研究这些函数的变化规律，这样的描述和研究方法称为欧拉方法。

以下简记$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$，物质坐标 $\boldsymbol{a}$ 和空间坐标 $\boldsymbol{x}$ 之间有确定

的联系：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},t) \quad 即\ a_i=a_i(x_1,x_2,x_3,t),\quad i=1,2,3 \tag{7.1}$$

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t) \quad 即\ x_i=x_i(a_1,a_2,a_3,t),\quad i=1,2,3 \tag{7.2}$$

$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},t)$表示 t 时刻处于空间位置 $\boldsymbol{x}$ 上的是哪一个连续介质质点，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t)$表示质点 $\boldsymbol{a}$ 在 t 时刻所处的空间位置。

对每个时刻 t 而言，$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 之间是一一对应的，$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},t)$和 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t)$都是单值连续函数，两者互为反函数。

7.2 应力张量

施加于固体的力引起变形，施加于液体的力引起流动。当一固体在一个力系作用下而保持平衡时，该物体的外形就要趋于畸变，以及产生了形变。固体的这种状态称为应变。物体在应变状态下具有内力，内力在物体的每一点产生应力。某点上的应力是用单位面积所受的力来量度的，它不仅依赖于受力的大小，还与所取的面相对于力的方向有关。假设有一根均匀的圆棒，它的截面积为 A'，并受到力 F 的拉伸作用，如图 7.1 所示。在圆棒上作一个单位法线与棒轴成 θ 角的截面，该截面面积为 $A=A'\sec\theta$，则该截面上的应力就是

$$T=\frac{F}{A}=\frac{F}{A'}\cos\theta \tag{7.3}$$

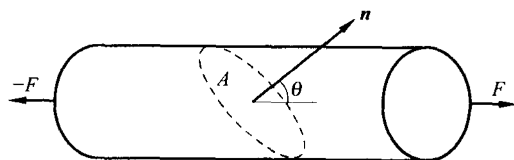


图 7.1

由式(7.3)可以清楚地看出，应力不只依赖于力，还与截面法线的方向有关。

式(7.3)给出的应力可以分解为两个分量：一个是沿截面法线方向的分量 σ，称为正应力；另一个是沿截面切线方向的分量 τ，称为剪应力。

现在考察在一个产生应变的固体内，某点 P 处的应力。为此，建立一个坐标系，并考虑这个物体内任意一个以点 P 为一顶点的体积元(一个小的直角六面体)，如图 7.2 所示。

显然，在体积元的每一面上都有应力。因为物体处于平衡，所以体积元中相对面上的应力大小相等，方向相反。在每一点上的应力就可以用 9 个量表示，即

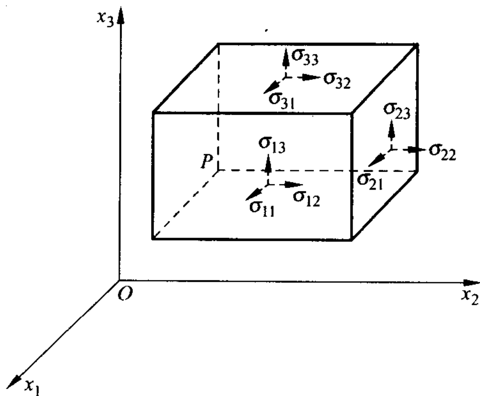


图　7.2

$$(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix}$$

其中 $\sigma_{ii}(i=1,2,3)$表示正应力，$\sigma_{ij}(i\neq j;i,j=1,2,3)$表示剪应力，上式所表示的各应力分量之间并不是完全独立的。事实上，由于体积元对于转动也是平衡的，因而对任一轴的力矩即转矩必须为零。可以得到 $\sigma_{12}=\sigma_{21}$，$\sigma_{13}=\sigma_{31}$，$\sigma_{23}=\sigma_{32}$，即 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ $(i,j=1,2,3)$。可以证明 σ_{ij} 各量是一个二阶张量的分量，这个张量称为应力张量。

例 7.1　设一个应力张量的分量为

$$(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

如果通过变换 $x_i^*=a_{ij}x_j$ 改变坐标系，这里

$$(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$$

由变换规律 $\sigma_{ij}^*=a_{ip}a_{jq}\sigma_{ij}$，可以求得新坐标系中应力张量的分量为

$$(\sigma_{ij}^*)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

于是在坐标系 x_i^* 中，所有的切应力都为零，应力只包含正应力，对于坐标轴

x_i^*，有 $\sigma_{ij}^* = 0(i \neq j)$，这样的一组坐标轴被称为应力张量的主轴。

主轴是一组特殊的坐标轴。对于主轴，应力张量是对角矩阵，相应的应力分量称为主应力。由主轴所决定的坐标平面称为主平面。从物理上讲，每一个主应力就是作用在一个主平面上的正应力。在主平面上，应力向量垂直于平面，没有剪切分量。

对于应力张量(σ_{ij})，总存在三个相互垂直的主轴方向 n_1, n_2, n_3，由本征方程

$$[(\sigma_{ij}) - \lambda \boldsymbol{I}] \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{7.4}$$

解得的本征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，即为主应力。

对于应力张量，存在三个标量不变量：

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \mathrm{tr}(\sigma_{ij}) = \sigma_{ii} \\ I_2 &= \frac{1}{2}[((\mathrm{tr}(\sigma_{ij}))^2 - \mathrm{tr}(\sigma_{ij}^2))] = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}) \\ I_3 &= \det(\sigma_{ij}) \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

它们分别称为第一、第二、第三应力不变量。这些量在坐标变换下保持不变。

7.3 应 变 张 量

考察连续介质物体在两个时刻的位形，称一个是初时刻，另一个是终时刻。物质坐标 $\boldsymbol{a}$ 同时也就是该质点在初时刻的空间坐标。质点 $\boldsymbol{a}$ 在终时刻的空间坐标为 $\boldsymbol{x}$，这时

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{a})$$

$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 都取直角坐标的分量，位移为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$$

在拉格朗日变量下，

$$u_i(\boldsymbol{a}) = x_i(\boldsymbol{a}) - a_i \tag{7.6}$$

在欧拉变量下，

$$u_i(\boldsymbol{x}) = x_i - a_i(\boldsymbol{x}), \quad i = 1,2,3 \tag{7.7}$$

刚体运动（平移和旋转）不产生变形。变形有伸缩、剪切、弯曲、扭转等各种形态，其共同的、基本的标志就是物体中质点间的距离发生了变化，因此可用距离的变化来描绘变形。

在初时刻考虑两相邻的质点 $P(\boldsymbol{a})$和 $P'(\boldsymbol{a}+\mathrm{d}\boldsymbol{a})$，其间的距离为 $\mathrm{d}s_0$。

$$(\mathrm{d}s_0)^2 = (\mathrm{d}a_1)^2 + (\mathrm{d}a_2)^2 + (\mathrm{d}a_3)^2 = \delta_{ij}\,\mathrm{d}a_i\mathrm{d}a_j \tag{7.8}$$

在终时刻，此两质点变到新位置 $Q(\boldsymbol{x})$和 $Q'(\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x})$，其间的距离为 $\mathrm{d}s$。

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + (\mathrm{d}x_3)^2 = \delta_{ij}\,\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j \tag{7.9}$$

由于

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3), \quad a_i = a_i(x_1, x_2, x_3)$$

假定这些函数连续可微，

$$\mathrm{d}x_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}\mathrm{d}a_j, \quad \mathrm{d}a_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j \tag{7.10}$$

将式(7.10)代入式(7.8)和式(7.9)，得

$$(\mathrm{d}s_0)^2 = \delta_{ij}\,\mathrm{d}a_i\mathrm{d}a_j = \delta_{ij}\frac{\partial a_i}{\partial x_l}\frac{\partial a_j}{\partial x_m}\mathrm{d}x_l\mathrm{d}x_m$$

$$(\mathrm{d}s)^2 = \delta_{ij}\,\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j = \delta_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial a_l}\frac{\partial x_j}{\partial a_m}\mathrm{d}a_l\mathrm{d}a_m$$

两式相减，分别以 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{x}$ 为自变量，而有

$$(\mathrm{d}s)^2 - (\mathrm{d}s_0)^2 = \left(\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i}\frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - \delta_{ij}\right)\mathrm{d}a_i\mathrm{d}a_j$$

$$(\mathrm{d}s)^2 - (\mathrm{d}s_0)^2 = \left(\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta}\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial a_\beta}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$$

记

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i}\frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - \delta_{ij}\right) \tag{7.11}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta}\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial a_\beta}{\partial x_j}\right) \tag{7.12}$$

则

$$(\mathrm{d}s)^2 - (\mathrm{d}s_0)^2 = 2E_{ij}\,\mathrm{d}a_i\mathrm{d}a_j = 2\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$$

由于$(\mathrm{d}s)^2-(\mathrm{d}s_0)^2$ 为标量，$\mathrm{d}a_i\mathrm{d}a_j$ 和 $\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$ 是二阶张量，由张量识别定理，知，$\boldsymbol{E}=\{E_{ij}\}$和 $\boldsymbol{\varepsilon}=\{\varepsilon_{ij}\}$是二阶张量。由式(7.11)和式(7.12)又知

$$E_{ij} = E_{ji}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$

即 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是二阶对称张量。称 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是应变张量。

对于刚体运动，恒有 $\mathrm{d}s=\mathrm{d}s_0$，从而所有的 E_{ij} 和 ε_{ij} 都是零，即此时 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是零张量。

下面通过位移来表示 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$。位移为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}, \qquad u_\alpha = x_\alpha - a_\alpha$$

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i} + \delta_{\alpha i}, \quad \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} = \delta_{\alpha i} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}$$

代入式(7.11)和式(7.12)中，得

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left[\delta_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i} + \delta_{\alpha i}\right)\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial a_j} + \delta_{\beta j}\right) - \delta_{ij}\right]$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta}\left(\delta_{\alpha i} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\right)\left(\delta_{\beta j} - \frac{\partial u_\beta}{\partial x_j}\right)\right]$$

即

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i}\frac{\partial u_\alpha}{\partial a_j}\right] \tag{7.13}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j}\right] \tag{7.14}$$

和应力张量一样，对于应变张量(ε_{ij})，也存在 3 个相互垂直的主轴方向 n_1, n_2, n_3。由本征方程

$$((\varepsilon_{ij}) - \lambda \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{7.15}$$

解得的本征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为主应变。

应变张量也存在三个标量不变量：

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \mathrm{tr}(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{ii} \\ I_2 &= \frac{1}{2}[((\mathrm{tr}(\varepsilon_{ij}))^2 - \mathrm{tr}(\varepsilon_{ij}^2))] = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}) \\ I_3 &= \det(\varepsilon_{ij}) \end{aligned}\right\} \tag{7.16}$$

它们分别称为第一、第二、第三应变不变量，这些量在坐标变换下同样保持不变。

7.4 位移梯度张量及其极分解

1. 位移梯度张量

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, 1)$给出 1 时刻连续介质体的位移。

$$\mathrm{d}x_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}\mathrm{d}a_j \qquad (t\text{ 固定})$$

式中 $F_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial a_j}$称为位移梯度，于是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 是矢量，故 $\boldsymbol{F} = \{F_{ij}\}$是二阶张量，称 $\boldsymbol{F}$ 为位移梯度张量。

因位移

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$$

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \delta_{ij}$$

$$(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j = (F_{im}\mathrm{d}a_m)(F_{in}\mathrm{d}a_n) = C_{mn}\mathrm{d}a_m \mathrm{d}a_n$$

其中

$$C_{mn} = F_{im}F_{in} = \frac{\partial x_i}{\partial a_m} = \frac{\partial x_i}{\partial a_n} = F_{mi}^{\mathrm{T}}F_{in}$$

$$\boldsymbol{C} = \{C_{mn}\} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F} \tag{7.17}$$

称为右柯西-格林变形张量。

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{7.18}$$

称为左柯西-格林变形张量。其中

$$B_{mn} = F_{im}F_{in} = \frac{\partial x_m}{\partial a_i}\frac{\partial x_n}{\partial a_i}$$

由 C_{mn} 的定义，知 $\boldsymbol{C}$ 为二阶对称张量。由于

$$(\mathrm{d}s)^2 - (\mathrm{d}s_0)^2 = (C_{ij} - \delta_{ij})\mathrm{d}a_i\mathrm{d}a_j = 2E_{ij}\mathrm{d}a_i\mathrm{d}a_j$$

知变形张量 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 的联系是

$$C_{ij} - \delta_{ij} = 2E_{ij}, \quad 即 \quad \boldsymbol{C} = 2\boldsymbol{E} + \boldsymbol{I} \tag{7.19}$$

对于刚体运动，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$（单位张量）。

2. 用 C_{mn} 表征变形

任取 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}=(\mathrm{d}a_1,\mathrm{d}a_2,\mathrm{d}a_3)$，$(\mathrm{d}s)^2=\mathrm{d}a_m\mathrm{d}a_n$，$\boldsymbol{N}=(N_1,N_2,N_3)$，$N_m=\dfrac{\mathrm{d}a_m}{\mathrm{d}s_0}$ 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的方向余弦。$\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 变形后为 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，其长度为 $\mathrm{d}s$。

$$\lambda^2 = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s_0}\right)^2 = C_{mn}\frac{\mathrm{d}a_m}{\mathrm{d}s_0}\frac{\mathrm{d}a_n}{\mathrm{d}s_0} = C_{mn}N_mN_n$$

故 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 方向上单位长度的伸缩为

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s_0} = (C_{mn}N_mN_n)^{\frac{1}{2}}$$

同理，$\mathrm{d}\boldsymbol{a}'$ 方向上的相对伸缩为

$$\lambda' = \frac{\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}s_0'} = (C_{mn}N_m'N_n')^{\frac{1}{2}}$$

其中 $N_m'=\dfrac{\mathrm{d}a_m'}{\mathrm{d}s_0'}$ $(m=1,2,3)$ 是 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}'$ 的方向余弦。记 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}'$ 间夹角为 θ_0，变形后 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}'$ 间夹角为 θ，则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}' = \mathrm{d}a_i\mathrm{d}a_i' = \mathrm{d}s_0\mathrm{d}s_0'\cos\theta_0$$

即

$$N_iN_i' = \cos\theta_0$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}' = \mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i' = \mathrm{d}s\mathrm{d}s'\cos\theta$$

左边以

$$\mathrm{d}x_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_m}\mathrm{d}a_m, \quad \mathrm{d}x_i' = \frac{\partial x_i}{\partial a_m}\mathrm{d}a_n'$$

代入，得

$$C_{mn}\mathrm{d}a_m\mathrm{d}a_n' = \mathrm{d}s\mathrm{d}s'\cos\theta$$

以 $\mathrm{d}s_0\mathrm{d}s_0'$ 除两边，得

$$C_{mn}N_mN_n = \lambda\lambda'\cos\theta$$

即

$$\cos\theta = \frac{C_{mn}N_m N'_n}{\lambda\lambda'}$$

3. 位移梯度张量的极分解

把位移梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 作极分解：

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U} \quad （实际变形时 \det\boldsymbol{F} > 0）$$

$\boldsymbol{R}$ 为正交张量，代表刚体转动；$\boldsymbol{U}$ 为正定对称张量，代表纯变形。$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}$ 可看成是先变形后转动的合成。

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{U}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a})$$

即 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 经过变形得到 $\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{U}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$，再经过旋转，得到 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{R}\cdot\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}}$。（注意：除了 $\boldsymbol{U}$ 的主轴方向外，$\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的方向并不一致，这是因为剪切变形会引起方向的改变。）

极分解 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}$ 则可看成是先转动，后变形。两种极分解中的纯变形张量 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 可不同，而转动部分则相同（都是同一个张量）。

4. 小变形时 U,V,R 的表达式

当 $\left|\frac{\partial u_i}{\partial a_j}\right| \ll 1$ 时，

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i}\right)$$

为小变形张量。

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} - \frac{\partial u_j}{\partial a_i}\right)$$

$$\mathrm{d}x_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}\mathrm{d}a_j = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j}\right)\mathrm{d}a_j = (\delta_{ij} + E_{ij} + \omega_{ij})\mathrm{d}a_j$$

略去二阶小量后，有

$$\mathrm{d}x_i = F_{ij}\mathrm{d}a_j = R_{ik}U_{kj}\mathrm{d}a_j = (\delta_{ik} + \omega_{ik})(\delta_{kj} + E_{kj})\mathrm{d}a_j$$

$$\mathrm{d}x_i = F_{ij}\mathrm{d}a_j = V_{ik}R_{kj}\mathrm{d}a_j = (\delta_{ik} + E_{ik})(\delta_{kj} + \omega_{kj})\mathrm{d}a_j$$

由此可知，小变形时有

$$R_{ik} = \delta_{ik} + \omega_{ik}$$

$$U_{ik} = V_{ik} = \delta_{ik} + E_{ik}$$

即小变形时，

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{E}$$

7.5　变形速度张量

1. 变形速度张量及其分量的几何意义

变形位移张量为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j}\right) \tag{7.20}$$

设 $\boldsymbol{v}$ 为速度场，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}\Delta t$ 是 Δt 时间内产生的位移。把 $u_\alpha = v_\alpha \Delta t$ 代入式(7.20)中，得

$$\varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}\Delta t = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Delta t + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Delta t - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_j}(\Delta t)^2\right)$$

即

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + O(\Delta t)$$

令 $\Delta t \to 0$ 时，即得

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{7.21}$$

称 $\dot{\boldsymbol{E}} = \{\dot{\varepsilon}_{ij}\}$ 为变形速度张量，它是二阶对称张量，是速度梯度张量 $\left\{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\}$ 的对称部分。和变形张量不同，在上面的变形速度张量的表达式中，不需假定 $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ 是小量。

变形速度张量各分量的几何意义可由

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

的意义相应地得到。即

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$$

表示平行于 x_1 轴的线元在单位时间内的相对收缩。

$$2\dot{\varepsilon}_{12} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}$$

表示 x_1 轴和 x_2 轴间的夹角在单位时间内的角度变化（也称此为剪切速度）。

类似地可解释其他分量的意义。

2. 微团速度分解

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ 是 t 时刻的速度场。考虑同一时刻（即固定 t，而有 $\mathrm{d}t = 0$）有

$$\mathrm{d}v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j = \varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}x_j + \omega_{ij}\,\mathrm{d}x_j$$

其中

$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

是二阶反对称张量。

记

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}\mathrm{curl}v, \quad \dot{\omega}_i = \frac{1}{2} \in_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

即

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_{32}, \quad \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_{13}, \quad \dot{\omega}_3 = \dot{\omega}_{21}$$

$$\dot{\omega}_{ij} = \in_{ijk}\dot{\omega}_k, \quad \dot{\omega}_{ij}\,\mathrm{d}x_j = (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathrm{d}\boldsymbol{x})_i$$

从而

$$\mathrm{d}v_i = \dot{e}_{ij}\,\mathrm{d}x_j + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathrm{d}\boldsymbol{x})_i$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

此式称为微团速度分解。右边第一项 $\dot{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 是变形引起的速度变化，第二项 $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 是微团作刚体旋转引起的速度变化，而旋转的角速度就是

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}\mathrm{curl}v$$

7.6 介质中曲面的移动和传播

1. 曲面的移动速度和传播速度

设运动曲面的方程为

$$F(x_1, x_2, x_3, t) = 0$$

则

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial F}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i = \frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t + \mathrm{grad}F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

记 $\mathrm{d}r$ 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 在曲面法线方向（即 $\mathrm{grad}F$ 的方向）上的投影，则上式给出

$$\frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t + |\mathrm{grad}F|\,\mathrm{d}r = 0$$

$$N = \frac{\mathrm{d}r}{\partial r} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial t}}{|\mathrm{grad}F|}$$

称 N 为 $F=0$ 曲面的移动速度。

$\boldsymbol{v}$ 为介质速度，$\boldsymbol{n}$ 为曲面 $F=0$ 的单位法向量，$v_n = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$ 为速度在曲面法向的分

量，则有

$$\theta = N - v_n = -\frac{1}{|\operatorname{grad}F|}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + v_i\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = -\frac{\frac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t}}{|\operatorname{grad}F|}$$

称 θ 为曲面 $F=0$ 的传播速度。

如果曲面 $F=0$ 在空间中固定不动(即 F 中不含 t)，则 $N=0$，从而 $\theta=-v_n$。

如果曲面 $F=0$ 始终由同样一些介质质点组成(称这样的曲面为物质面)，则随体微商$\frac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t}$和传播速度 θ 都等于零，此曲面在介质中不传播。

2. 可变区域上物理量随时间的变换率

设 $V(t)$是可随时间变化的空间区域，其周界面为 $S(t)$，物理量 A 在区域 V 上的总量为$\int_V A\,\mathrm{d}V$。下面求$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V A\,\mathrm{d}V$。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} A(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}V = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{V+\Delta V} A(\boldsymbol{x},t+\Delta t)\mathrm{d}V - \int_V A(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}V\right]$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_V [A(\boldsymbol{x},t+\Delta t) - A(\boldsymbol{x},t)]\mathrm{d}V + \int_{\Delta V} A(\boldsymbol{x},t+\Delta t)\mathrm{d}V\right]$$

$$= \int_V \frac{\partial A}{\partial t}\mathrm{d}V + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta V} A\,\mathrm{d}V$$

设 $V(t)$周界面 $S(t)$上面元 $\mathrm{d}S$ 的外单位法向量为 $\boldsymbol{n}$，在 $\mathrm{d}S$ 处的移动速度为 N，则 Δt 时间内，在 $\mathrm{d}S$ 处发生的区域变化 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}SN\Delta t$，从而

$$\int_{\Delta V} A\,\mathrm{d}V = \int_S AN\Delta t\mathrm{d}S$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} A\mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial A}{\partial t}\mathrm{d}V + \int_S AN\mathrm{d}S \tag{7.22}$$

特别地，如果 $V(t)$为确定的连续介质物体，此时周界面 S 为物质面，从而 $\theta=0$，$N=v_n$，上式就变为

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V(t)} A\mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial A}{\partial t}\mathrm{d}V + \int_S AN\mathrm{d}S$$

$$= \int_V\left[\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{div}(A\boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}V$$

7.7 本构方程

描述一个物质特性的方程称为该物质的本构方程。应力-应变关系描述了物质的力学特性，因此是本构方程。除此之外，还有其他一些本构方程，例如描述热传导

的特性、电阻、质量传递等的本构方程。虽然现实世界中存在多种多样的物质，但是无粘性流体、牛顿粘性流体和理想弹性固体这三种简单的理想化的应力-应变关系很好地描述了我们周围许多物质的力学特性。因此，本节主要讨论这三种物质的应力-应变关系。

1. 无粘性流体

无粘性流体的应力张量是各向同性的，即它的形式为

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p \tag{7.23}$$

式中，δ_{ij}为克罗内克符号，p为压力，它是一个标量。无粘型流体中的应力分量可以用矩阵形式表示为

$$(\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

在理想气体中，压力p、密度ρ和温度T由状态方程

$$\frac{p}{\rho} = RT$$

相联系(式中R为气体常数)。对于实际气体或液体，常常可以得到状态方程

$$f(p,\rho,T) = 0$$

不可压缩流体是一种特殊情况，它的状态方程是

$$\rho = \text{const.}$$

于是，对于不可压缩流体，只剩下压力是任意变量，它完全由运动方程和边界条件所确定。

2. 牛顿流体

牛顿流体是一种粘性流体，其剪应力与变形率成正比。对于牛顿流体，应力-应变关系由下面的方程式决定：

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + D_{ijkl}V_{kl}$$

式中，σ_{ij}是应力张量，V_{kl}是变形率张量，D_{ijkl}是流体的粘性系数张量，p是静压力，$-p\delta_{ij}$代表流体静止(当$V_{kl}=0$)时可能的应力状态。

根据状态方程，假定张量D_{ijkl}的元素与温度有关而与应力或变形率无关。四阶张量D_{ijkl}具有$3^4=81$个元素。

如果流体是各向同性的，本构方程可以写成

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu V_{ij} - \frac{2}{3}\mu V_{kk}\delta_{ij} \tag{7.24}$$

这个公式是由斯托克斯(G. G. Stokes)导出的，因此服从式(7.24)的流体也被称为

斯托克斯流体。对于这种流体,一个材料系数(粘性系数)μ就足以确定其特性。

3. 理想弹性固体

理想弹性固体也被称为胡克弹性固体,其应力张量和应变张量成线性比例,即

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{7.25}$$

式中E_{ijkl}是与应力或应变无关的弹性常数张量或弹性模量张量。作为一个四阶张量,E_{ijkl}有81个元素,但因为$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$,故必定有

$$E_{ijkl} = E_{jikl} \tag{7.26}$$

此外,由于$\varepsilon_{kl}=\varepsilon_{lk}$,并且方程(7.25)中的下标$k$和$l$是缩并的哑指标,我们总能在不改变总和的情况下使$E_{ijkl}$对于$k$和$l$对称,于是总能把方程(7.25)写成

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(E_{ijkl} + E_{ijlk})\varepsilon_{kl} = E'_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{7.27}$$

它具有性质

$$E'_{ijkl} = E'_{ijlk} \tag{7.28}$$

只要完成了这个对称化,在式(7.26)和式(7.28)的条件下,E_{ijkl}最多只有36个独立的常数。

对于大多数弹性固体,独立弹性常数的数目远小于36。由于物质存在对称性导致了这个数目的减少。当物质为各向同性时,即当弹性性质在所有方向相同时,弹性常数的数目减到了最少。更确切地说,物质的各向同性是由下面的要求所规定的:不管坐标系统的方向如何,数组E_{ijkl}具有完全相同的数值。

各向同性弹性固体的本构方程为

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{aa}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{7.29}$$

常数λ和μ称为拉梅常数。在工程文献中,第二个拉梅常数实际上总是写成G,并且等同于剪切模量。

采用直角笛卡儿坐标,展开上式,得到各向同性弹性固体的本构方程

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} = \frac{1}{2G}\sigma_{xy} \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yz} = \frac{1}{2G}\sigma_{yz} \\
\varepsilon_{zx} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{zx} = \frac{1}{2G}\sigma_{zx}
\end{aligned}\right\} \tag{7.30}$$

式中，常数 E，ν 和 G 与拉梅常数 λ 和 μ 有关。E 就是著名的杨氏模量，ν 称为泊松比，G 称为剪切模量。

习　题

7.1　设在 P 点的应力张量为 $(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$，某平面法向量为 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{3}(2,\ 1,\ -2)$，求作用在该平面上的应力和沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的应力。

7.2　物体内某处的应力张量的分量可以表示成矩阵 $(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求作用在平面 $x+3y+z=1$ 上的应力向量。

7.3　物体内一点的应力状态由下面的矩阵给出：

$$(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}200 & 400 & 300\\ 400 & 0 & 0\\ 300 & 0 & -100\end{pmatrix}$$

试求通过这点，并平行于平面 $x+2y+2z-6=0$ 的平面上的应力向量。

7.4　物体内一点的应力状态由下面的矩阵给出：

$$(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}100 & -10 & 20\\ -10 & 40 & 0\\ 20 & 0 & -100\end{pmatrix}$$

试求不变量 I_1，I_2，I_3 及主应力的值。

7.5　$u_1=-\gamma a_2+\beta a_3$，$u_2=\gamma a_1-\alpha a_3$，$u_3=-\beta a_2+\alpha a_3$，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ 为常数，求位移梯度张量。

7.6　$x_1=2a_3$，$x_2=a_1$，$x_3=4a_2$，求位移梯度张量。

7.7　由传播速度 $\theta=0$，证明在自由表面（水面）$z=f(x,y,t)$ 上恒有 $v_z=\frac{\partial f}{\partial t}+v_x\frac{\partial f}{\partial x}+v_y\frac{\partial f}{\partial y}$（$v_x$，$v_y$，$v_z$ 是速度 $\boldsymbol{v}$ 的三个分量）。

7.8　对以下位形求 $\boldsymbol{F}=\left\{\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\right\}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$，并说明其变形特点。

（1）$x_1=\lambda a_1$，$x_2=\lambda a_2$，$x_3=\lambda a_3$（λ_i 均为常数）；

（2）$x_1=a_1+a_2\tan\gamma$，$x_2=a_2$，$x_3=a_3$（γ 为常数）。

7.9　$\boldsymbol{F}=\left\{\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\right\}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$，证明：

(1) $\boldsymbol{F}^{-1}=\left\{\dfrac{\partial x_i}{\partial a_j}\right\}$， $\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}=\left\{\dfrac{\partial a_k}{\partial x_i}\dfrac{\partial a_k}{\partial x_j}\right\}$；

(2) $(\mathrm{d}s)^2-(\mathrm{d}s_0)^2=(\delta_{ij}-B^{-1}{}_{ij})\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$。

由此得 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}=\{e_{ij}\},\boldsymbol{I}=\{\delta_{ij}\})$。

7.10 证明在 $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3)$方向上的线元在单位时间内的相对伸缩为 $n_in_j\dot{e}_{ij}$（$\{\dot{e}_{ij}\}$为变形速度张量）。

7.11 $\boldsymbol{E}=\{e_{ij}\}$为小变形张量，$\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=e_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j=1$ 是与 $\boldsymbol{E}$ 对应的二次曲面，l 是 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 过此曲面上 P 点（$\overrightarrow{OP}$由 $\mathrm{d}x$ 给出）在法线方向上的投影。证明小变形位移 $\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的大小为 $1/l$。

第 8 章 张量分析在损伤力学中的应用

本章首先介绍了损伤理论常用的张量运算，即张量的并矢表示和缩并。然后介绍基于能量损伤理论的损伤本构方程。损伤变量和有效应力是损伤力学中的两个基本量。引入应变等价原理或能量等价原理导出的有损材料的弹性方程和无损材料的弹性方程形式上非常相似，其中引入了有效应力张量、有效应变张量和有效弹性模量等基本概念。这些理论成功地应用于各向同性材料和各向异性材料的损伤分析。

8.1 张量的并矢表示和缩并

1. 并矢量积

为描述变形体在外力的作用下，各部分之间的内力相互作用，经常是将该变形体沿某个截面切开，截面的法向单位矢量为 $\boldsymbol{n}$，如图 8.1 所示。在截面上某一单位面积上作用的力矢量为 $\boldsymbol{f}$。$\boldsymbol{f}$ 不仅与物体的内力状态有关，还与该截面的方向有关。一般来说，$\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 不共线，其夹角是任意的。要描述 $\boldsymbol{f}$ 对截面的拉伸作用，就必须考虑 $\boldsymbol{f}$ 对 $\boldsymbol{n}$ 的投影矢量，用 $\boldsymbol{f}_n$ 表示：

$$\boldsymbol{f}_n = (\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}) \otimes \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \otimes (\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}) \tag{8.1}$$

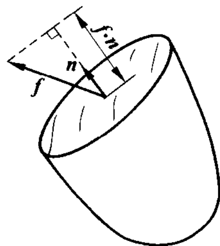


图 8.1

$\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}$ 是力矢量 $\boldsymbol{f}$ 与法向单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 的点积，乘的结果是一标量。任意两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的并矢量积记为 $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$，它具有下列性质：

$$\left.\begin{aligned} a\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{a}\otimes(a\boldsymbol{b}) = a(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{a}\otimes(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{c} \\ (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\otimes\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{a} \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

其中 a 是标量。且有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c}) &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\otimes\boldsymbol{c} \\ (\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} &= \boldsymbol{a}\otimes(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

可以证明式(8.3)所表示的变换也是线性的，即并矢量积表示的是一种进行线性变换的算子。因此，$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$ 可用 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的分量写成

$$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b} = (a_i\boldsymbol{e}_i)\otimes(b_j\boldsymbol{e}_j) = a_ib_j\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j \tag{8.4}$$

注意：一般来说，$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}$。式(8.4)的形式不依赖于坐标系的选择，因为

$$\begin{aligned} \bar{a}_i\bar{b}_j\bar{\boldsymbol{e}}_i\otimes\bar{\boldsymbol{e}}_j &= M_{ip}a_pM_{jq}b_q(M_{ir}\boldsymbol{e}_r)\otimes(M_{js}\boldsymbol{e}_s) \\ &= M_{ip}M_{ir}M_{jq}M_{js}a_pb_q\boldsymbol{e}_r\otimes\boldsymbol{e}_s \\ &= \delta_{pr}\delta_{qs}a_pb_q\boldsymbol{e}_r\otimes\boldsymbol{e}_s \\ &= a_rb_s\boldsymbol{e}_r\otimes\boldsymbol{e}_s \\ &= a_ib_j\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j \end{aligned} \tag{8.5}$$

并矢量积 $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$ 也称为两个矢量的张量积，基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 的并矢量积 $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ 称为单位并矢量。并矢量积的概念可推广到三个或更多个矢量的积。例如，矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的三重矢量积可写成 $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c}$，并可用分量形式表示为 $a_ib_jc_k\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k$。

2. 笛卡儿张量

定义二阶笛卡儿张量为并矢量积的线性组合，因为由式(8.4)，并矢量积本身是单位并矢量的线性组合，所以二阶笛卡儿张量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为单位并矢量的线性组合。因此，它具有如下形式：

$$\boldsymbol{A} = A_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j \tag{8.6}$$

张量的存在同任何坐标系无关，然而只有在引入坐标系后才能确定张量的分量，而分量的值依赖于坐标系的选取。假设在具有基矢量 $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 的新坐标系中，$\boldsymbol{A}$ 有分量 $\bar{A}_{ij}$，则

$$\boldsymbol{A} = A_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j = \bar{A}_{ij}\bar{\boldsymbol{e}}_i\otimes\bar{\boldsymbol{e}}_j \tag{8.7}$$

然而由式(8.4)和式(8.5)，有

$$A_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j = A_{ij}M_{pi}M_{qj}\bar{\boldsymbol{e}}_p\otimes\bar{\boldsymbol{e}}_q = \bar{A}_{pq}\bar{\boldsymbol{e}}_p\otimes\bar{\boldsymbol{e}}_q \tag{8.8}$$

因此

$$\bar{A}_{pq} = M_{pi}M_{qj}A_{ij} \tag{8.9}$$

这是二阶张量分量的变换律。

3. 张量的缩并

考虑三阶张量 $C_{ijk}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k$，分量 C_{ijk} 按下列法则变换：

$$\overline{C}_{ijk} = M_{ip}M_{jr}M_{ks}C_{prs} \tag{8.10}$$

按 $\overline{C}_{ijk}$ 的后两个指标求和，即形成三项和

$$\overline{C}_{i11} + \overline{C}_{i22} + \overline{C}_{i33} = \overline{C}_{ijj}, \quad i = 1,2,3 \tag{8.11}$$

形式上，这是令 C_{ijk} 的第二与第三个指标互等来实现的。于是有

$$\overline{C}_{ijj} = M_{ip}M_{jr}M_{ks}C_{prs} = M_{ip}\delta_{rs}C_{prs} = M_{ip}C_{prr} \tag{8.12}$$

这样，分量 C_{prr} 变换时就像矢量分量一样，按一对指标求和而使张量减少二阶的运算称为张量的缩并。

在并矢中，若取某两个矢量进行点积，即进行缩并，每缩并一次，并矢的阶数减低两阶。两个并矢的点积是指将它们相邻的两个矢量进行缩并。例如

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{d} \tag{8.13}$$

两个并矢的双点积是指把它们最邻近的 4 个矢量两两缩并，即

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) : (\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) \otimes (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) \tag{8.14}$$

两个二阶并积(二阶张量)的双点积(缩并两次)的结果是一个标量，也就是说张量的阶数是：2＋2(张量相乘，阶数相加)－2－2(每缩并一次，阶数减 2；缩并两次，阶数减 4)＝0。

8.2 损伤本构方程

1. 热力学状态空间和内部状态变量

由连续介质组成的物体是一个热力学系统，它的每一构形对应于一个热力学状态。按照记忆衰退原理以及等效热力学史的概念，允许采用一组从宏观平均意义上描述材料内部微结构变化的内变量来描述材料的历史记忆特性。为描述一个力学系统的热力学状态，可以从不同的角度选择一些物理量作为其内部状态变量，其中有的变量是可以测量的，有的是难以测量的；有的则是与状态变量对应的，或称为与其相伴的。可测的状态变量一般选择应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和绝对温度 T 等，那么与其相伴的状态变量则是应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 和熵 S 等。内部状态变量还可以选择弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^e$、塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$、累积塑性应变 p 和损伤 $\boldsymbol{D}$ 等；与这些状态变量相伴的变量可以是应力 $\boldsymbol{\sigma}$、应变硬化阈增值 R 和损伤应变能释放率 $\boldsymbol{Y}$ 等。

内部状态变量构成一个 n 维热力学状态空间 E^n，对应于每一种变形历史均构成这个热力学状态空间的子空间 E_z。应力 $\boldsymbol{\sigma}$、内能 e、热流矢量 $\boldsymbol{q}$ 和熵 S 均为定义在这个子空间的算子。子空间 E 的维数是算子维数之和。

当加载不超过材料的初始屈服面或后继屈服面、卸载等可逆过程，除应力和温度以外的内变量均视为没有变化，这种变形过程对应于热力学状态空间 E^n 中的某一

子集。然而，对于不可逆的损伤过程，它对应着跨于一系列不可逆过程的状态空间。

2. 本构泛函

连续介质体的变形具有历史记忆性。按照本构泛函的决定性原理，则在某一时刻 t，热力学状态空间中的应力 σ、内能 e、熵 S 和热流矢量 $\boldsymbol{q}$ 应当为整个过去的变形历史的泛函。

按照本构理论的局部作用原理，某点 $\boldsymbol{x}$ 的应力、内能、熵和热流矢量只与该点某邻域 $\boldsymbol{\Omega}$ 内点的热力学史有关。

根据物质的时空系无差异原理，本构泛函最后可以表示为

$$\boldsymbol{\sigma} = \underset{\tau=-\infty}{\overset{t}{\boldsymbol{\sigma}}}(\boldsymbol{\varepsilon}, T; \boldsymbol{x}, t) \tag{8.15}$$

$$e = \underset{\tau=-\infty}{\overset{t}{e}}(\boldsymbol{\varepsilon}, T; \boldsymbol{x}, t) \tag{8.16}$$

$$S = \underset{\tau=-\infty}{\overset{t}{S}}(\boldsymbol{\varepsilon}, T; \boldsymbol{x}, t) \tag{8.17}$$

$$\boldsymbol{q} = \underset{\tau=-\infty}{\overset{t}{\boldsymbol{q}}}(\boldsymbol{\varepsilon}, T; \boldsymbol{x}, t) \tag{8.18}$$

式中，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变张量。

3. 损伤本构方程的一般形式

在变形体力学的基础上，将热力学第一定律和第二定律应用于本构泛函，就可以导出含缺陷体材料的本构方程，简称为损伤本构方程。

设连续介质单位质量的亥姆霍兹(Helmholtz)自由能为

$$\varphi = e - TS \tag{8.19}$$

假定自由能 φ 是内部状态变量 $\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{v}$ 和损伤变量 $\boldsymbol{D}$ 的函数，即

$$\varphi = \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{D}) \tag{8.20}$$

式中，$\boldsymbol{D}$ 为损伤变量张量，$\boldsymbol{v}$ 为其他的内变量张量。设其他变量个数为 m，第一内变量的分量个数为 n，则

$$\boldsymbol{v} = \{v_k^i, i = 1,2,\cdots,m; k = 1,2,\cdots,n\} \tag{8.21}$$

由于内变量的实际含义不同，张量 $\boldsymbol{v}$ 的阶数可以是零阶(标量)、一阶(矢量)、二阶或高阶。与之对应的广义力定义为

$$\boldsymbol{f} = \{f_k^i, i = 1,2,\cdots,m; k = 1,2,\cdots,n\} \tag{8.22}$$

张量 $\boldsymbol{f}$ 的个数与阶数均和张量 $\boldsymbol{v}$ 的个数与阶数相对应，现假定它们都是二阶张量。

热力学第一定律(能量守恒定律)和热力学第二定律(熵增加原理)可以表示成下面的形式：

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho\left(S + \frac{\partial\varphi}{\partial T}\right)\dot{T} - \rho T\dot{S} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{v}} : \dot{\boldsymbol{v}} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{D}} : \dot{\boldsymbol{D}} + h - \mathrm{div}\boldsymbol{q} = 0 \tag{8.23}$$

$$\left(\boldsymbol{\sigma}-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\rho\left(S-\frac{\partial\varphi}{\partial T}\right)\dot{T}-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{v}}:\dot{\boldsymbol{v}}-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{D}}:\dot{\boldsymbol{D}}+\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{q}\geqslant 0 \tag{8.24}$$

式(8.9)和式(8.10)对于任意的应变速率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$和温度变化率 T 都成立，故有

$$\boldsymbol{\sigma}=\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{8.25}$$

$$S=-\frac{\partial\varphi}{\partial T} \tag{8.26}$$

定义

$$\boldsymbol{f}=\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{v}} \tag{8.27}$$

$$\boldsymbol{y}=\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{D}} \tag{8.28}$$

式中，$\boldsymbol{f}$ 是与 $\boldsymbol{v}$ 对应的热力学广义力；$\boldsymbol{y}$ 是与损伤变量 $\boldsymbol{D}$ 对应的热力学广义力，称为损伤应变能释放率，它的物理意义可以理解为表征材料对内部微结构变化具有的抗力。

于是式 (8.10) 可写成

$$-\boldsymbol{f}:\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y}:\boldsymbol{D}+\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{q}\geqslant 0 \tag{8.29}$$

如果不考虑力学耗散与热耗散的耦合，则有

$$-\boldsymbol{f}:\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y}:\boldsymbol{D}\geqslant 0 \tag{8.30a}$$

$$\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{q}\geqslant 0 \tag{8.30b}$$

损伤耗散与力学过程中其他内部状态变量的相互影响相当复杂。为简化起见，并根据损伤具有不可逆特性，且仍不考虑它们之间的耦合，于是

$$-\boldsymbol{f}:\boldsymbol{v}\geqslant 0 \tag{8.31}$$

$$-\boldsymbol{y}:\boldsymbol{D}\geqslant 0 \tag{8.32}$$

在通常情况下，可写成

$$\boldsymbol{y}=-F\boldsymbol{D} \tag{8.33}$$

F 是一正函数，式 (8.33) 描述了损伤演变规律。

引入傅里叶(Fourier)热传导定律

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{g}=-\frac{1}{T}\boldsymbol{C}\cdot\mathrm{grad}T \tag{8.34}$$

式中 $\boldsymbol{C}$ 为二阶对称张量。当热传导是各向同性时，张量 $\boldsymbol{C}$ 可表示为

$$\boldsymbol{C}=kT\boldsymbol{I} \tag{8.35a}$$

式中，k 为热导系数。

于是各向同性热传导的傅里叶方程为

$$\boldsymbol{q}=-k\,\mathrm{grad}T \tag{8.35b}$$

综上所述，将热力学第一定律和第二定律应用于损伤本构泛函，得到以亥姆霍兹

自由能表达的损伤本构方程。归纳如下：

$$\boldsymbol{\sigma}=\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{8.36}$$

$$S=-\frac{\partial\varphi}{\partial T} \tag{8.37}$$

$$\boldsymbol{f}=\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{v}} \tag{8.38}$$

$$\boldsymbol{y}=\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{D}} \tag{8.39}$$

$$\boldsymbol{q}=-\frac{1}{T}\boldsymbol{C}\cdot\mathrm{grad}T \tag{8.40}$$

上面的一组方程，分别表示应力-应变关系、熵的定义、内变量演变规律、损伤演变规律以及傅里叶热传导方程。

在不考虑热耗散或与热能解耦后，可以把应变能作为自由能。在只考虑弹性与损伤耦合时，式(8.24)和式(8.27)可分别写成如下的弹性损伤本构方程：

$$\boldsymbol{\sigma}=\rho\frac{\partial\varphi^{e}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{e}} \tag{8.41}$$

$$\boldsymbol{y}=\rho\frac{\partial\varphi^{e}}{\partial\boldsymbol{D}} \tag{8.42}$$

式中，φ^{e} 为损伤弹性应变能，$\boldsymbol{\varepsilon}^{e}$ 为弹性应变张量。

除了用亥姆霍兹自由能表述损伤本构方程，还可以用吉布斯(Gibbs)自由能形式表述损伤本构方程。利用勒让德(Legendre)变换，可以得到亥姆霍兹自由能的余函数，即吉布斯自由能函数

$$\psi=\psi(\boldsymbol{\sigma},T,\boldsymbol{v},\boldsymbol{D})=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}-\varphi(\boldsymbol{\varepsilon},T,\boldsymbol{v},\boldsymbol{D}) \tag{8.43}$$

推证得到的损伤本构方程同用亥姆霍兹自由能表述的损伤本构方程形式基本相同。

8.3　损伤变量和有效应力

1. 损伤变量

用损伤理论分析材料受力后的力学状态时，首先要选择恰当的损伤变量以描述材料的损伤状态。由于材料的损伤引起材料微观结构和某些宏观物理性能的变化，因此可以从微观和宏观两方面选择度量损伤的基准。从微观方面，可以选用空隙的数目、长度、面积和体积；从宏观方面，可以选用弹性系数、屈服应力、拉伸强度、伸长率、密度、电阻、超声波速和声辐射等。在这两类基准中，最常用的是：①空隙的数

目、长度、面积和体积；②由空隙的形状、排列和取向决定的有效面积；③弹性系数（弹性模量 E 和泊松比 ν）；④密度等。

根据以上两类基准，可以用直接法和间接法测量材料的损伤。例如，对微观方面的基准，可采用直接测定的方法以判定材料的损伤状态；而对宏观方面的基准，则可用机械法或物理法测定，然后间接推算材料的损伤。至于实际采用哪种方法，应根据损伤变量如何定义以及损伤类型而定。

在不同的情况下，可将损伤变量定义为标量、矢量或张量。例如，对于短小无规律的空隙分布或各向分布相同的球形空洞，损伤变量可采用标量；对于微小的分布平面裂纹，可用与其垂直的矢量表示损伤，但矢量表示的损伤变量，不能简单相加以表示不同方向平面裂缝的集合；而用张量表示损伤，尽管其数学表达比较复杂，但有可能比较准确地表示微观空隙的排列状态及其力学特性，因此在各向异性损伤理论中用得较多。

从热力学的观点看，损伤变量是一种内部状态变量，它能反映物质结构的不可逆变化过程。

2. 有效应力的概念

现用直杆受单轴拉伸的例子说明有效应力的概念。图 8.2(a)为一初始无损伤的杆，假设该杆受 F 力到一定大小后产生均匀的损伤，见图 8.2(b)。若杆的初始横截面积为 A，受损后其损伤面积（包括微裂纹和空隙）为 A^*，则杆的净面积或有效面积为 $\tilde{A}=A-A^*$。在均匀损伤状态下，损伤变量取为标量。卡切诺夫(Kachanov)在研究金属的蠕变断裂时，第一次提出用连续性变量 ψ 描述材料的损伤状态[2]，定义 ψ 为

$$\psi = \frac{\tilde{A}}{A} \tag{8.44}$$

拉波得诺夫(Rabotnov)在研究金属蠕变时引入了一个与连续性变量相对应的变量 D，称为损伤变量[3]，定义 D 为

$$D = \frac{A^*}{A} = \frac{A-\tilde{A}}{A} \tag{8.45}$$

式中，$D=0$，对应于无损伤状态；$D=1$，对应于完全损伤（断裂）状态；$0<D<1$，对应于不同程度的损伤状态。

令 $\sigma=F/A$ 为横截面上的名义应力；$\tilde{\sigma}=F/\tilde{A}$ 为净截面或有效截面上的应力，称为净应力或有效应力，则利用式(8.45)并由

$$\sigma \cdot A = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{A} \tag{8.46}$$

得

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D} \tag{8.47}$$

当材料发生非均匀损伤时，可在物体内一点处取一体元，用相似的方法仍可得到式(8.47)。

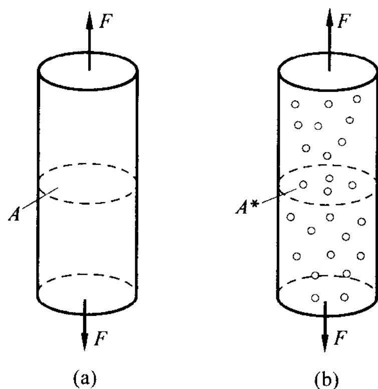


图 8.2

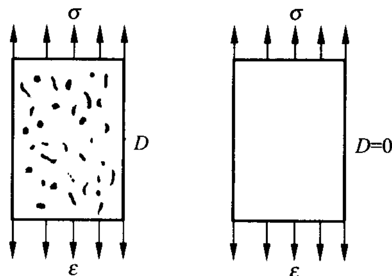


图 8.3

3. 应变等价原理

在受损材料中，测定有效面积是比较困难的，为了能间接地测定损伤，勒梅特提出了应变等价原理。这一假设认为，应力 σ 作用在受损材料上引起的应变与有效应力作用在无损材料上引起的应变等价，如图 8.3 所示。根据这一原理，受损材料的本构关系可通过无损材料中的名义应力得到，即

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\widetilde{E}} = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-D)E} \tag{8.48}$$

或

$$\sigma = E(1-D)\varepsilon \tag{8.49}$$

式(8.49)表示一维问题中受损材料的本构关系。

将式(8.49)改写为

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\widetilde{E}}$$

式中，$\widetilde{E}=E(1-D)$，为受损材料的弹性模量，称为有效弹性模量。由此得到

$$D = 1 - \frac{\widetilde{E}}{E} \tag{8.50}$$

由式(8.49)得

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\varepsilon}(1-D)\varepsilon + E(1-D) - E\,\varepsilon\,\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\varepsilon} \tag{8.51}$$

当加载至某一值时卸载，可假定损伤不可逆，即卸载过程中损伤值不变，则有 $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\varepsilon}=0$；且 E 为材料无损伤时的弹性模量，是常量，故由式(8.51)可得

$$D = 1 - \frac{1}{F}\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \tag{8.52}$$

将式(8.52)与式(8.50)比较，可见受损材料的弹性模量 $\widetilde{E}$ 即为卸载线的斜率。$\widetilde{E}$ 也称为卸载弹性模量。图 8.4 是用测量卸载弹性模量的方法得到的损伤随塑性应变 ε_p 变化的情况，试件材料为 99.99%的铜，D_c 为损伤变量的临界值，ε_{pD}为损伤开始时的塑性应变，ε_{pR}为断裂时的塑性应变。

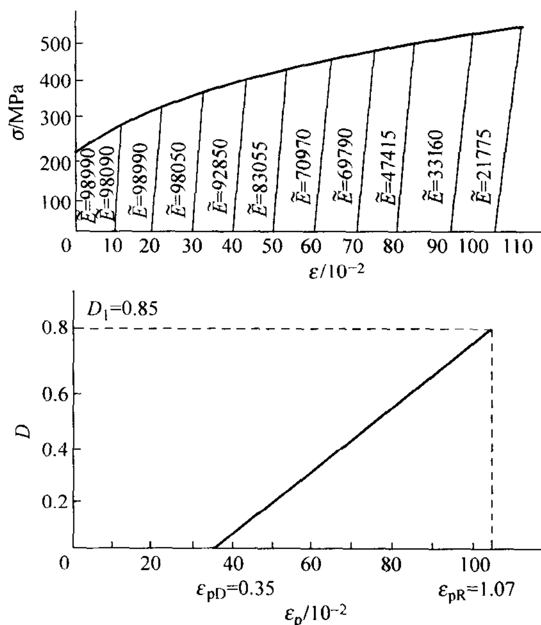


图 8.4

4. 有效应力张量

在多轴应力作用下，如认为损伤是各向同性的，则可将单独应力下的有效应力推广表示为张量，即

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1 - \boldsymbol{D}} \tag{8.53}$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为柯西应力张量。

实际上，材料的损伤往往为各向异性，在这种情况下，损伤变量就不能采用标量，而要用张量度量。设在物体内取一体元，该体元任一方向的截面积为 A，该截面的法向单位矢量为 $\boldsymbol{n}$，则截面的面积矢量为

$$\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{n} = A_i\boldsymbol{e}_i \quad (i = 1,2,3,\text{对 } i \text{ 求和，下同}) \tag{8.54}$$

式中，$\boldsymbol{e}_i$ 为沿直角坐标系的单位矢量，A_i 为面积 A 在三个坐标平面内的投影面积。

当材料损伤后，设有一虚构的体元，其法线为 $\tilde{\boldsymbol{n}}$ 的面积矢量为

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \widetilde{A}\tilde{\boldsymbol{n}} = (1 - D_i)A_i\boldsymbol{e}_i \tag{8.55}$$

式中，D_i 为 A_i 面法线方向的损伤变量。

现定义二阶对称张量 $\boldsymbol{\psi}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})$， $\boldsymbol{I}$ 为单位张量，使

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{A} \tag{8.56}$$

由式(8.54)和式(8.55)得

$$\boldsymbol{\psi} = \psi_i\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i = (1 - D_i)\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i \tag{8.57}$$

可见 $\boldsymbol{\psi}$ 是一对称张量。

设有效应力张量为 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$，柯西应力张量为 $\boldsymbol{\sigma}$，则

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{A} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{A}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{A} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}) \cdot \boldsymbol{A} \tag{8.58}$$

因为式(8.58)对任意的 $\boldsymbol{A}$ 都成立，故有

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\psi} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D})$$

从而有

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D})^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{8.59}$$

在一般情况下，式(8.59)表示的有效应力张量不是对称张量，这给数值计算带来很大不便。为此，一些学者提出过将有效应力张量对称化的各种方法。以下两式是常用的将有效应力张量对称化的方法：

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D})^{-1} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D})^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}] \tag{8.60}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D})^{-1/2} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D})^{-1/2} \tag{8.61}$$

下面证明，对称化的有效应力张量是时空系无关量。众所周知，柯西应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 是时空系无关量，即

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{8.62}$$

凡带撇号的都是在新坐标系中的量，$\boldsymbol{Q}$ 是一个正交的变换张量。设损伤张量 $\boldsymbol{D}$ 也是时空系无关量，即

$$\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{8.63}$$

于是张量 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}$ 和 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1}$ 也是时空系无关量，因为

$$\boldsymbol{I}' - \boldsymbol{D}' = \boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}) \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{8.64}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{I}' - \boldsymbol{D}')^{-1} &= [\boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}) \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}]^{-1} \\ &= \boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}) \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{8.65}$$

同样，$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1/2}$ 也是时空系无关量，因为

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D})^{-1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D})^{-\frac{1}{2}} \cdot (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D})^{-\frac{1}{2}} \tag{8.66}$$

既然 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1}$ 是时空系无关量，则 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1/2}$ 必然也是时空系无关量。

由式(8.60)和式(8.61)得

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\sigma}' \cdot (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1'} + (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1'} \cdot \boldsymbol{\sigma}']$$

$$= \frac{1}{2}\{[\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}]\cdot[\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}] + [\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}]\cdot[\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}]\}$$

$$= \boldsymbol{Q}\cdot\frac{1}{2}[\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1} + (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1}\cdot\boldsymbol{\sigma}]\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{8.67}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1/2'} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' \cdot (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1/2'}$$

$$= \{[\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1/2'}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}]\cdot(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})\cdot(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})\}\cdot[\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1/2}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}]$$

$$= \boldsymbol{Q}\cdot[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1/2}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1/2}]\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{8.68}$$

这表明式(8.60)和式(8.61)所表示的有效应力张量是时空系无关量。

8.4 损伤能量释放率和断裂准则

1. 损伤能量释放率

对于缺陷体材料，损伤能量释放率定义为

$$\boldsymbol{Y} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} : \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{D}) : \frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})}{\partial \boldsymbol{D}} : \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{D}) : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{D}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$$

$$= -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{D})^{-1} : \frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})}{\partial \boldsymbol{D}} : \boldsymbol{\sigma} \tag{8.69}$$

对于各向同性损伤，损伤变量为标量，于是

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D}) = \frac{1}{1-D}\boldsymbol{I}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})}{\partial \boldsymbol{D}} = \frac{1}{(1-D)^2}\boldsymbol{I} \tag{8.70}$$

代入式(8.32)后得

$$Y = \frac{\nu}{2E(1-D)^2}(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 - \frac{1+\nu}{2E(1-D)^2}\boldsymbol{\sigma}^2 \tag{8.71}$$

由式(8.69)还可导出各向同性损伤时的损伤能量释放率为

$$Y = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{D}) : \varepsilon^{\mathrm{e}} = \frac{W^{\mathrm{e}}}{1-D} \tag{8.72}$$

式中，W^{e} 为弹性应变能密度。

当载荷不变时，由 $\boldsymbol{\sigma}=(1-D)\boldsymbol{E}:\boldsymbol{\varepsilon}$ 得到

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = (1-D)\boldsymbol{E} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} - \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}\mathrm{d}D = 0$$

故

$$\mathrm{d}W^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} = (1-D)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} : \boldsymbol{E} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$$

$$Y = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}W^{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}D} \tag{8.73}$$

损伤能量释放率 Y 可作为静水压力及米泽斯等价应力的函数加以计算。设静

水压力为 $\sigma_H=\dfrac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})$，则偏应力张量为 $\boldsymbol{\sigma}'=\boldsymbol{\sigma}-\sigma_H\boldsymbol{I}$，米泽斯等价应力为

$$\sigma_{eq}=\left[\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_H\boldsymbol{I}):(\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\sigma}_H\boldsymbol{I})\right]^{\frac{1}{2}} \tag{8.74}$$

由式 (8.71) 得到

$$Y=-\frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-D)^2}s_t \tag{8.75}$$

式中

$$s_t=\frac{2}{3}(1+\nu)+3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2 \tag{8.76}$$

s_t 反映了三轴应力比的影响，称为三轴应力因子。

在单轴应力下，$\sigma_H=\dfrac{1}{3}\sigma$，$\sigma_{eq}=\sigma$，$s_t=1$，于是

$$Y=-\frac{\sigma^2}{2E(1-D)^2} \tag{8.77}$$

2. 断裂准则

当物体中某点处的体元产生损伤后，随着外载荷的增加，损伤将发展直至体元完全断裂。从理论上说，如用有效面积定义损伤，当 $D=1$ 时，体元完全断裂。但很多实验表明，当 $D<1$ 时，体元已完全断裂。设体元完全断裂时的损伤值为 D_c，损伤能量释放率为 Y_c，则断裂准则为

$$D=D_c \tag{8.78}$$

或

$$|Y|=Y_c \tag{8.79}$$

式中，D_c 和 Y_c 为材料常数，可由单轴应力实验确定。

在单轴应力下，

$$D=1-\sigma/\sqrt{2E|Y|}$$

故临界损伤变量为

$$D_c=1-\sigma_c/\sqrt{2EY_c} \tag{8.80}$$

式中，σ_c 为断裂时的应力。对金属材料，实验表明 $0.2\leqslant D_c\leqslant 0.8$。

8.5　各向同性材料耦合损伤的热力学理论

1. 热力学势

可取自由能为热力学势。材料的自由能常可分为两部分，即

$$\varphi = \varphi_e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, \boldsymbol{D}, \pi) + \varphi_p(T, p) \tag{8.81}$$

式中，φ_e 和 φ_p 分别为弹性应变能和塑性应变能，T 为温度，p 为累积塑性应变，其变化率为

$$\dot{p} = \left(\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}^p : \dot{\varepsilon}^p\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^p : \dot{\varepsilon}_{ij}^p\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8.82}$$

材料在高周疲劳下的不可逆应变是微观塑性应变，为了模拟处于这种准弹性状态的高周疲劳，引进微塑性应变 e^p，它由不可逆位错所引起，其累积应变率为

$$\pi = \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{e}^p : \boldsymbol{e}^p\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8.83}$$

利用勒让德变换，改变自变量后，得弹性余能为

$$\psi = \psi_e(\boldsymbol{\sigma}, T, \boldsymbol{D}, \pi) - \psi_p(T, p) \tag{8.84}$$

在等温条件下，如忽略微观塑性应变（$\pi \ll 1$），则式(8.81)和式(8.84)中的 φ_e 和 ψ_e 项为材料的弹性能和弹性余能。

利用正交性原理，由式(8.69)和式(8.72)可导出

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{8.85}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \tag{8.86}$$

$$\boldsymbol{Y} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{D}} \tag{8.87}$$

$$R = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \dot{p}} \tag{8.88}$$

$$r = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\pi}} \tag{8.89}$$

式中，$\boldsymbol{\varepsilon}^e$，$\boldsymbol{Y}$，$R$ 和 r 为 $\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{D}$，p 和 $\boldsymbol{\pi}$ 的相伴变量，$\boldsymbol{Y}$ 为损伤能量释放率。

对于无损材料（$D=0$），弹性应变能为

$$\rho\psi_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \tag{8.90}$$

式中，$\boldsymbol{E}$ 为弹性张量（四阶对称张量）。

将式(8.90)代入式(8.86)，得

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \tag{8.91}$$

对于各向同性材料，弹性张量 $\boldsymbol{E}$ 的分量为

$$E_{ijkl} = \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl}\right) \tag{8.92}$$

式中，E 为材料的弹性模量，ν 为泊松比。

将式(8.92)代入式(8.90)和式(8.91)得

$$\rho\psi_e = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^e)^2 + (\boldsymbol{\varepsilon}^e)^2\right] \tag{8.93a}$$

和

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{I}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^e\right) \tag{8.93b}$$

对于无损材料($D=0$)，弹性余能为

$$\rho\psi_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{E}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \tag{8.94}$$

式中 E^{-1} 为柔度张量(四阶对称张量)。

将式(8.94)代入式(8.85)，得

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{E}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \tag{8.95}$$

对于各向同性材料，柔度张量的分量形式为

$$E^{-1}_{ijkl} = \frac{1+\nu}{E}\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{8.96}$$

将式(8.96)代入式(8.94)和式(8.95)，得

$$\rho\psi_e = \frac{1+\nu}{2E}\boldsymbol{\sigma}^2 - \frac{\nu}{2E}(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 \tag{8.97}$$

和

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}\boldsymbol{I}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} \tag{8.98}$$

式(8.98)为弹性本构关系的另一种形式。

对于一般的应力状态，为方便起见，记

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23}=\sigma_{32} \\ \sigma_{31}=\sigma_{13} \\ \sigma_{12}=\sigma_{21} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23}=\varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31}=\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12}=\varepsilon_{21} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \tag{8.99}$$

则 $\boldsymbol{E}^{-1}$ 可以表示为以下矩阵形式：

$$
(E_{ij}^{-1}) = \begin{bmatrix}
\frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & -\frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{31}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}}
\end{bmatrix} \tag{8.100}
$$

因为 $\nu_{ij}/E_i=\nu_{ji}/E_j$（对 i,j 不求和），所以矩阵(E_{ij}^{-1})是对称的。

对于受损材料，由有效应力的概念和应变等价原理可以得到

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1}:\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D}):\boldsymbol{\sigma} \tag{8.101}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{e}=\boldsymbol{E}^{-1}:\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{E}^{-1}:\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D}):\boldsymbol{\sigma}=\tilde{\boldsymbol{E}}^{-1}(\boldsymbol{D}):\boldsymbol{\sigma} \tag{8.102}$$

$$\tilde{\boldsymbol{E}}^{-1}(\boldsymbol{D})=\boldsymbol{E}^{-1}:\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D}) \tag{8.103a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{D})=\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{D}):\boldsymbol{E} \tag{8.103b}$$

且

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{E}:\tilde{\boldsymbol{E}}^{-1}(\boldsymbol{D}) \tag{8.104}$$

式中，$\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{D})$为有效弹性张量，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1}$。

由此，可以由测定的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{D})$的各个分量计算 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})$的分量。例如，对单向应力状态，式(8.104)为

$$M=\frac{1}{1-D}=\frac{E}{\tilde{E}},\quad D=1-\frac{\tilde{E}}{E}$$

这和式(8.50)相同。

由以上的关系，从式(8.98)和式(8.93b)即可得到多轴应力下受损材料的弹性本构方程和有效应力张量为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{e}=\frac{1+\nu}{E}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\frac{\nu}{E}\boldsymbol{I}\,\mathrm{tr}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{M}:\boldsymbol{\sigma}-\frac{\nu}{E}\boldsymbol{I}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}:\boldsymbol{\sigma}) \tag{8.105}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{M}:\boldsymbol{\sigma}=\frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{M}:\boldsymbol{I}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^{e}+\boldsymbol{M}:\boldsymbol{\varepsilon}^{e}\right) \tag{8.106}$$

如果应力张量$\boldsymbol{\sigma}$ 的主轴和有效应力张量$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 的主轴都固定且重合，则有

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}=M_{ij}\sigma_j \tag{8.107}$$

式中，σ_i，$\tilde{\sigma}_i$（$i=1,2,3$）分别是 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 的主值。

如果损伤张量 $\boldsymbol{D}$ 的主轴与 $\boldsymbol{\sigma}$，$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 的主轴重合，且主方向损伤之间不耦合，则

$$M_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-D_i}, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{8.108}$$

$$\tilde{\sigma}_1=\frac{\sigma_1}{1-D_1},\quad \tilde{\sigma}_2=\frac{\sigma_2}{1-D_2},\quad \tilde{\sigma}_3=\frac{\sigma_3}{1-D_3} \tag{8.109}$$

式中,D_1,D_2 和 D_3 为主损伤。这是无耦合的各向异性损伤。

2. 耗散势

为了导出耗散量的本构方程,设耗散势为

$$\phi\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}},\dot{p},\dot{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{p}},\dot{\boldsymbol{\Pi}},\dot{\boldsymbol{D}},\frac{\boldsymbol{q}}{T};T,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}},\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},p,\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}},\boldsymbol{\Pi},\boldsymbol{D}\right) \tag{8.110}$$

式中,$\boldsymbol{q}$ 为热流矢量。

经勒让德变换后,耗散势为

$$\psi(\boldsymbol{\sigma},\dot{p},\dot{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{p}},\dot{\boldsymbol{\Pi}},\boldsymbol{Y},\mathrm{grad}T;T,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}},\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},p,\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}},\boldsymbol{\Pi},\boldsymbol{D}) \tag{8.111}$$

由正交性原理得到

粘塑性

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\sigma}},\quad R=-\frac{\partial\psi}{\partial\dot{p}} \tag{8.112}$$

微塑性

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{p}}},\quad r=-\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\boldsymbol{\Pi}}} \tag{8.113}$$

损伤

$$\dot{\boldsymbol{D}}=-\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{Y}} \tag{8.114}$$

热效应

$$\frac{\boldsymbol{q}}{T}=-\frac{\partial\psi}{\partial\,\mathrm{grad}T} \tag{8.115}$$

为了能选取 ψ 的解析表达式,现将 ψ 表示为

$$\psi=\underset{\text{塑性或粘塑性}}{\underset{\downarrow}{\psi_{\mathrm{p}}}}+\underset{\text{损伤}}{\underset{\downarrow}{\psi_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{Y},\dot{p},\dot{\boldsymbol{\Pi}};T,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}},\boldsymbol{D})}}+\underset{\text{微塑性}}{\underset{\downarrow}{\psi_{\Pi}}} \tag{8.116}$$

项之间通过塑性累积应变率 $\dot{p}$ 和微塑性应变率$\dot{\boldsymbol{\Pi}}$耦合。

对于粘塑性问题,可取

$$\psi_{\mathrm{p}}(\sigma,T,p,D)=\frac{K}{N+1}\left[\frac{\sigma_{\mathrm{eq}}}{K(1-D)}\right]^{N+1}p^{-\frac{N}{M}} \tag{8.117}$$

式中,K、M、N 为依赖于温度的材料常数,σ_{eq}为等价应力。

对于塑性问题，ψ_{p} 取屈服函数 $f=0$，得到

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\lambda}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial f}{\partial R}\dot{\lambda} \tag{8.118}$$

式中，$\dot{\lambda}$ 是一个乘子，由 $\dot{f}=0$ 的条件得到。

耦合损伤的各向同性应变硬化模型可由下列修正的米泽斯屈服条件得到：

$$f = \frac{\sigma_{\mathrm{eq}}}{1-D} - \sigma_{\mathrm{y}} = 0 \tag{8.119}$$

式中，σ_{y} 为屈服应力。

根据已提出的大量损伤模型，ψ_D 可取下列解析表达式：

$$\psi_D(Y,\dot{p},\dot{\pi};T,\varepsilon^p,D) = \frac{1}{2}\frac{Y^2}{s_0}\frac{\dot{p}+\dot{\pi}}{(1-D)^{a_0}} \tag{8.120}$$

$$\dot{D} = -\frac{\partial \psi_D}{\partial Y} = -\frac{Y}{s_0}\frac{\dot{p}+\dot{\pi}}{(1-D)^{a_0}} \tag{8.121}$$

在弹性范围内：

$$\dot{p} = 0, \quad \dot{D} = -\frac{Y}{s_0}\frac{\dot{\pi}}{(1-D)^{a_0}} \tag{8.122}$$

在塑性范围内：

$$\dot{\pi} \approx 0, \quad \dot{D} = -\frac{Y}{s_0}\frac{\dot{p}}{(1-D)^{a_0}} \tag{8.123}$$

式中，s_0，a_0 为参数。

8.6 各向异性损伤理论

由前述各节内容可见，在建立受损材料的本构关系时，应变等价原理有非常重要的作用。但是由式(8.91)，有

$$\varepsilon_{ij} = \tilde{E}_{ij}^{-1}\sigma_j \tag{8.124}$$

式中

$$\tilde{E}_{ij}^{-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{E(1-D_j)}, & i = j \\ -\dfrac{\nu}{E(1-D_j)}, & i \neq j \end{cases} \tag{8.125}$$

可以看出，$\tilde{E}_{ij}^{-1}$ 是不对称张量。例如在主应力空间中，

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\end{Bmatrix}=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}\frac{1}{1-D_1} & \frac{\nu}{1-D_2} & -\frac{\nu}{1-D_3}\\ -\frac{\nu}{1-D_1} & \frac{1}{1-D_2} & -\frac{\nu}{1-D_3}\\ -\frac{\nu}{1-D_1} & -\frac{\nu}{1-D_2} & \frac{1}{1-D_3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\end{Bmatrix} \tag{8.126}$$

只有对各向同性损伤，$D_1=D_2=D_3$，$\tilde{E}_{ij}^{-1}$才是对称张量。

1. 能量等价原理

为了分析各向异性弹性损伤，西多霍夫(Sidoroff)提出了能量等价原理。该原理指出，只要用有效应力张量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 代替柯西应力张量$\boldsymbol{\sigma}$，受损材料的弹性余能和无损材料的弹性余能在形式上相同。

无损材料的弹性余能为

$$\rho\psi_c=\rho\psi_c(\boldsymbol{\sigma},0)=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{E}^{-1}:\boldsymbol{\sigma}$$

由能量等价假设，受损材料的弹性余能为

$$\begin{aligned}\rho\psi_c(\tilde{\boldsymbol{\sigma}},\boldsymbol{D})&=\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{E}^{-1}:\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}(D):\boldsymbol{E}^{-1}:\boldsymbol{M}(D):\boldsymbol{\sigma}\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}:\tilde{\boldsymbol{E}}^{-1}(\boldsymbol{D}):\boldsymbol{\sigma}\end{aligned} \tag{8.127}$$

式中

$$\tilde{\boldsymbol{E}}^{-1}(\boldsymbol{D})=\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}):\boldsymbol{E}^{-1}(\boldsymbol{D}):\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D}) \tag{8.128}$$

由此可知

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{D})=\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{D}):\boldsymbol{E}(\boldsymbol{D}):(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{D}) \tag{8.129}$$

这表明弹性张量 $\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{D})$和柔度张量 $\boldsymbol{E}^{-1}(\boldsymbol{D})$均为对称张量。

利用正交性原理，由式(8.127)可得

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\rho\frac{\partial\psi(\boldsymbol{D})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\tilde{\boldsymbol{E}}^{-1}(\boldsymbol{D}):\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}):\boldsymbol{E}^{-1}(\boldsymbol{D}):\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D}):\boldsymbol{\sigma} \tag{8.130}$$

或

$$(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{D}):\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{E}^{-1}(\boldsymbol{D}):\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D}):\boldsymbol{\sigma} \tag{8.131}$$

定义有效弹性应变张量为 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$，即

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{D}):\boldsymbol{\varepsilon} \tag{8.132}$$

由式(8.131)得损伤材料的弹性本构关系为

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=\boldsymbol{E}^{-1}:\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \tag{8.133}$$

比较式(8.133)和式(8.102)可见，只要将应力张量$\boldsymbol{\sigma}$ 和应变张量$\boldsymbol{\varepsilon}$ 用有效应力

张量$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$和有效应变张量$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$代替后，受损材料的弹性本构关系和无损材料的弹性本构关系具有相同的形式。

将有效应力的表达式(8.101)代入式(8.97)，得到各向同性材料损伤状态的弹性余能为

$$\rho\psi_c(\tilde{\boldsymbol{\sigma}},\boldsymbol{D}) = \frac{1+\nu}{2E}\boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-2} - \frac{\nu}{2E}[\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1}]^2 \tag{8.134}$$

由正交性原理得

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \rho\frac{\partial\psi_c}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-2} - \frac{\nu}{E}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1}\mathrm{tr}[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^{-1}] \tag{8.135}$$

将有效应力的表达式(8.133)代入式(8.93a)，得到受损材料的弹性应变能为

$$\rho\varphi_e = \frac{E}{2(1+\nu)}\left\{\frac{\nu}{1-2\nu}[\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})]^2 + [\boldsymbol{\varepsilon}\cdot(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})]^2\right\} \tag{8.136}$$

由正交性原理得

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial\varphi_e}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{E}{1+\nu}\left\{\frac{\nu}{1-2\nu}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})\mathrm{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})] + \boldsymbol{\varepsilon}\cdot(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})^2\right\} \tag{8.137}$$

对于单轴拉伸，由式(8.135)得

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E(1-D_1)^2} = \frac{\sigma_1}{\tilde{E}} \\
\varepsilon_2 &= -\frac{\nu\sigma_1}{E(1-D_1)(1-D_2)} = -\frac{\tilde{\nu}_{12}}{\tilde{E}}\sigma_1 \\
\varepsilon_3 &= -\frac{\nu\sigma_1}{E(1-D_1)(1-D_3)} = -\frac{\tilde{\nu}_{13}}{\tilde{E}}\sigma_1
\end{aligned}\right\} \tag{8.138}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{E} &= E(1-D_1)^2 \\
\tilde{\nu}_{12} &= \frac{\nu(1-D_1)}{1-D_2} \\
\tilde{\nu}_{13} &= \frac{\nu(1-D_1)}{1-D_3}
\end{aligned}\right\} \tag{8.139}$$

由此可确定损伤变量D_1，D_2和D_3为

$$\left.\begin{aligned}
D_1 &= 1-\left(\frac{\tilde{E}}{E}\right)^{\frac{1}{2}} \\
D_2 &= 1-\frac{\nu}{\tilde{\nu}_{12}}(1-D_1) \\
D_3 &= 1-\frac{\nu}{\tilde{\nu}_{13}}(1-D_1)
\end{aligned}\right\} \tag{8.140}$$

2. 损伤能量释放率

在8.4节中曾由应变等价原理导出了损伤能量释放率的表达式，现由能量等价原理导出损伤能量释放率的表达式。对各向同性材料，由式(8.129)有

$$\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{D})}{\partial(\boldsymbol{D})}=\frac{\partial \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{D})}{\partial \boldsymbol{D}}:\boldsymbol{E}(\boldsymbol{D}):(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{D})+\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{D}):\boldsymbol{E}(\boldsymbol{D}):\frac{\partial(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{D})}{\partial \boldsymbol{D}}$$

$$=-\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})^{-1}:\frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})}{\partial \boldsymbol{D}}:\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})^{-1}:\boldsymbol{E}(\boldsymbol{D}):(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{D})$$

$$-\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})^{\mathrm{T}}:\boldsymbol{E}(\boldsymbol{D}):(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})^{\mathrm{T}})^{-1}:\frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{D}}:(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})^{T})^{-1}$$

$$=-\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})^{-1}:\frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})}{\partial \boldsymbol{D}}:\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{D})-\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{D}):\frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{D}}:(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})^{\mathrm{T}})^{-1}$$

$$=-2\left(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})^{-1}:\frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})}{\partial \boldsymbol{D}}:\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{D})\right)^{s} \tag{8.141}$$

上标 s 表示括号内张量的对称部分。

$$\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{D})^{-1}}{\partial \boldsymbol{D}}=2\left(\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{D})^{-1}:\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})^{-1}:\frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})}{\partial \boldsymbol{D}}\right)^{s} \tag{8.142}$$

损伤能量释放率为

$$\boldsymbol{Y}=\rho\frac{\partial \varphi_{e}}{\partial \boldsymbol{D}}=\boldsymbol{\varepsilon}:\left(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})^{-1}:\frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})}{\partial \boldsymbol{D}}:\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{D})\right)^{s}:\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$=\boldsymbol{\varepsilon}:\left(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})^{-1}:\frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})}{\partial \boldsymbol{D}}:\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})^{-1}:\boldsymbol{E}(\boldsymbol{D}):(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})^{\mathrm{T}})^{-1}\right)^{s}:\boldsymbol{\varepsilon} \tag{8.143}$$

和

$$\boldsymbol{Y}=\rho\frac{\partial \varphi_{e}^{*}}{\partial \boldsymbol{D}}=\boldsymbol{\sigma}:\left(\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{D})^{-1}:\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})^{-1}:\frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})}{\partial \boldsymbol{D}}\right)^{s}:\boldsymbol{\sigma}$$

$$=\left(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})^{\mathrm{T}}:\boldsymbol{E}(\boldsymbol{D})^{-1}:\frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})}{\partial \boldsymbol{D}}\right):\boldsymbol{\sigma} \tag{8.144}$$

设应力的主轴和材料的主轴重合，且取主轴系为坐标系，得

$$|Y_i|=\sigma_j M_{jk}E_{kl}^{-1}\frac{\partial M_{lm}}{\partial D_i}\sigma_m=\frac{\sigma_i}{(1-D_i)^2}E_{ij}^{-1}\frac{\sigma_j}{(1-D_j)}\quad(\text{对 } i \text{ 不求和}) \tag{8.145}$$

或

$$\left.\begin{aligned}
|Y_1|&=\frac{\sigma_1}{(1-D_1)^2}\left[\frac{\sigma_1}{E_1(1-D_1)}-\frac{\nu_{21}\sigma_2}{E_2(1-D_2)}-\frac{\nu_{31}\sigma_3}{E_3(1-D_3)}\right]\\
|Y_2|&=\frac{\sigma_2}{(1-D_2)^2}\left[-\frac{\nu_{12}\sigma_1}{E_1(1-D_1)}+\frac{\sigma_2}{E_2(1-D_2)}-\frac{\nu_{32}\sigma_3}{E_3(1-D_3)}\right]\\
|Y_3|&=\frac{\sigma_3}{(1-D_3)^2}\left[-\frac{\nu_{13}\sigma_1}{E_1(1-D_1)}-\frac{\nu_{23}\sigma_2}{E_2(1-D_2)}+\frac{\sigma_3}{E_3(1-D_3)}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{8.146}$$

在平面应力状态中，令 $\sigma_2/\sigma_1=\lambda,\nu_{12}=\nu$，则

$$|Y_1|=\frac{\sigma_1^2}{E_1}g_1(\lambda,\boldsymbol{D}),\quad |Y_2|=\frac{\sigma_1^2}{E_1}g_2(\lambda,\boldsymbol{D}) \tag{8.147}$$

式中

$$g_1(\lambda,\boldsymbol{D})=\frac{1}{(1-D_1)^2}\left(\frac{1}{1-D_1}-\frac{\nu\lambda}{1-D_2}\right)$$

$$g_2(\lambda,\boldsymbol{D})=\frac{1}{(1-D_2)^2}\left(-\frac{\nu\lambda}{1-D_1}+\frac{E_1}{E_2}-\frac{\lambda^2}{1-D_2}\right)$$

在单轴拉伸时，

$$Y_2=Y_3=0,\quad Y_1=Y$$

$$|Y|=\frac{\sigma^2}{E(1-D_1)^3}=E(1-D_1)^2\varepsilon_1^2 \tag{8.148}$$

第 9 章

MATLAB 在矩阵和张量运算中的应用

在国际学术界，MATLAB 被确认为一个准确、可靠的科学计算分析软件，MATLAB 已经成为大学生必须掌握的工具。利用 MATLAB 可以使复杂繁琐的推演计算变得简单方便。本章对 MATLAB 的发展过程及其特点进行了介绍，对 MATLAB 的矩阵运算和张量运算进行了归纳和分析，介绍了常用的命令和函数，并给出了大量的利用 MATLAB 进行矩阵运算和张量运算的实例。

9.1 MATLAB 简介

1. MATLAB 的发展历程和影响

MATLAB 诞生于 20 世纪 70 年代，它的编写者是 Cleve Moler 教授和他的同事。当时，任美国新墨西哥大学计算机科学系主任的 Cleve Moler 教授出于减轻学生编程负担的动机，为学生设计了一组调用 LINPACK 和 EISPACK 库程序的通俗易用的接口程序。Cleve Moler 给这个接口程序取名为 MATLAB，意为矩阵(matrix)和实验室(laboratory)的组合。以后几年，MATLAB 作为免费软件在校际流传使用，深受大学生的喜爱。

在 John Little 的推动下，由 Little、Moler、Steve Bangert 合作，于 1984 年成立了 MathWorks 公司，并把 MATLAB 正式推向市场。从那时起，MATLAB 的内核采用 C 语言编写，而且除原有的数值计算能力外，还新增了数据图视功能。MATLAB 以商品形式出现后，仅短短几年，就以其良好的开放性和运行的可靠性，使原先控制领

域里的封闭式软件包（如英国的 UMIST，瑞典的 LUND 和 SIMNON，德国的 KEDDC）纷纷被淘汰，而改以 MATLAB 为平台加以重建。20 世纪 90 年代，MATLAB 已经成为国际控制界公认的标准计算软件。到 20 世纪 90 年代初期，在国际上三十几个数学类科技应用软件中，MATLAB 在数值计算方面独占鳌头，而 Mathematica 和 Maple 则分居符号计算软件的前两名。Mathcad 因其提供计算、图形、文字处理的统一环境而深受中学生欢迎。

MathWorks 公司于 1993 年推出 MATLAB 4.0 版本，从此告别 DOS 版。4.x 版在继承和发展其原有的数值计算和图形可视能力的同时，出现了以下几个重要变化。

（1）推出了 SIMULINK。这是一个交互式操作的动态系统建模、仿真、分析集成环境。它的出现使人们有可能考虑许多以前不得不做简化假设的非线性因素、随机因素，从而大大提高了人们对非线性、随机动态系统的认知能力。

（2）开发了与外部进行直接数据交换的组件，打通了利用 MATLAB 进行实时数据分析、处理和硬件开发的道路。

（3）推出了符号计算工具包。1993 年 MathWorks 公司从加拿大滑铁卢大学购得 Maple 的使用权，以 Maple 为“引擎”开发了符号数学工具箱（Symbolic Math Toolbox 1.0）。MathWorks 公司此举加快结束了国际上数值计算、符号计算孰优孰劣的长期争论，促成了两种计算的互补发展新时代。

（4）引入了 Notebook。MathWorks 公司瞄准应用范围最广的 Word，运用 DDE 和 OLE，实现了 MATLAB 与 Word 的无缝连接，从而为专业科技工作者创造了融科学计算、图形可视、文字处理于一体的高水准环境。

1997 年仲春，MATLAB 5.0 版问世，紧接着是 5.1、5.2，以及 1999 年春季的5.3 版；2000 年 10 月，MathWorks 公司推出 MATLAB 6.0；2002 年 8 月，推出 MATLAB 6.5。每一次版本的推出都使 MATLAB 界面越来越友好，内容越来越丰富，功能越来越强大。与 4.x 相比，现今的 MATLAB 拥有更丰富的数据类型和数据结构、更友善的面向对象、更快速精良的图形可视、更广博的数学和数据分析资源、更多的应用开发工具。本章将主要介绍 MATLAB 6.5 符号计算在矩阵和张量运算中的应用。

诚然，到 1999 年底，Mathematica 也已经升级到 4.0 版，它特别加强了以前欠缺的大规模数据处理能力。Mathcad 也赶在 2000 年到来之前推出了 Mathcad 2000，它购买了 Maple 内核和库的部分使用权，打通了与 MATLAB 的接口，从而把其数学计算能力提高到专业层次。就影响而言，至今仍然没有其他计算软件能与 MATLAB 相匹敌。

在欧美大学里，诸如应用代数、数理统计、自动控制、数字信号处理、模拟与数字通信、时间序列分析、动态系统仿真等课程的教科书都把 MATLAB 作为内容。这几

乎成了20世纪90年代教科书与旧版书籍的区别性标志。在那里，MATLAB是攻读学位的大学生、硕士生、博士生必须掌握的基本工具。在国际学术界，MATLAB已经被确认为准确、可靠的科学计算标准软件。在许多国际一流学术刊物上，尤其是信息科学刊物，都可以看到MATLAB的应用。

2. MATLAB的主要特点

作为国际上公认的最优秀的计算和仿真分析软件，MATLAB的主要特点如下。

(1) 编程效率高

它是一种面向科学与工程计算的高级语言，允许用数学形式的语言编写程序，且比Basic、Fortran和C等语言更加接近我们书写计算公式的思维方式，用MATLAB编写程序犹如在演算纸上排列出公式与求解问题，因此，MATLAB语言也可通俗地称为演算纸式科学算法语言。由于它编写简单，所以编程效率高，易学易懂。

(2) 用户使用方便

MATLAB语言是一种解释执行的语言，它灵活、方便，其调试程序手段丰富，调试速度快，需要学习的时间少。人们用任何一种语言编写程序和调试程序一般都要经过4个步骤：编辑、编译、连接以及执行和调试，各个步骤之间是顺序关系。MATLAB语言把这4个步骤融为一体，能够快速排除输入程序中的书写错误、语法错误以及语义错误，从而加快了用户编写、修改和调试程序的速度。

(3) 扩充能力强

MATLAB语言有丰富的库函数，在进行复杂的数学运算时可以直接调用，而且用户可以根据自己的需要方便地建立和扩充新的库函数。另外，MATLAB可以混合编程，能够方便地调用Fortran、C等语言的子程序。

(4) 语句简单，内涵丰富

MATLAB语言中最重要的成分是函数，其一般的形式为[a,b,c,…]=fun(d,e,f,…)，即一个函数由函数名、输入变量和输出变量组成，同一函数名、不同数目的输入变量以及不同数目的输出变量，代表着不同的含义。这使得使用MATLAB编写的程序简单、短小而且高效。

(5) 方便的绘图功能

利用MATLAB绘图十分方便，它具有一系列二维和三维绘图函数，例如线性坐标、对数坐标、半对数坐标以及极坐标，都只需调用不同的绘图函数，在图上标出图题、坐标轴标注、栅格绘制也都只需调用相应的命令。总之，MATLAB语言的设计思想可以说代表了当前计算机高级语言的发展方向，已经成为科学研究必不可少的工具之一。

3. MATLAB 的运行环境

(1) MATLAB 的界面及窗口

在 Windows 下运行 MATLAB，就会出现如图 9.1 所示的工作界面。其中最主要的是 3 个窗口：命令窗口、工作空间窗口以及历史命令窗口。

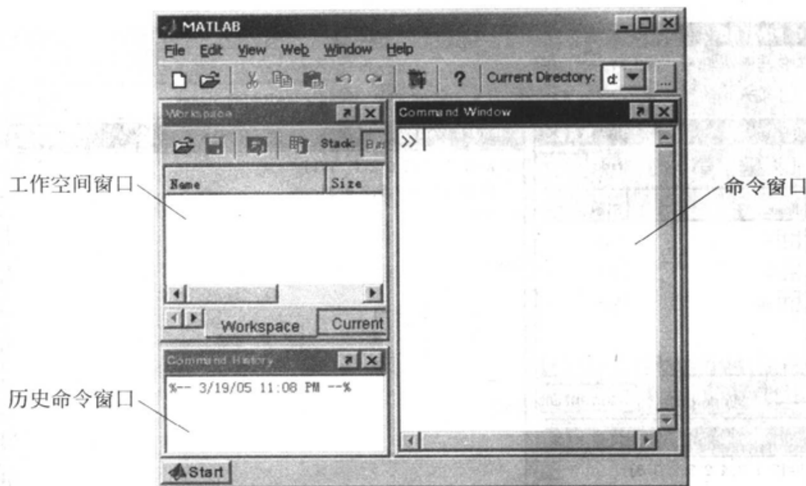


图 9.1

命令窗口用来输入命令行，实现计算或绘图。计算结果也是在命令窗口里面列出。

工作空间窗口列出当前运算过程中使用到的变量的名称、变量数组大小、变量字节大小和变量类型等信息。双击工作空间窗口里面的变量名称，会弹出一个数组编辑器的窗口，显示该变量的具体内容。

历史命令窗口显示命令窗口中所执行过的命令。利用该窗口，一方面可以查看曾经执行过的命令；另一方面还可以重复利用原来输入的命令。可以从历史命令窗口中通过双击某个命令行来执行该命令。

(2) MATLAB 的运行方式

MATLAB 运算有两种运行方式，即命令行方式和 M 文件方式。

① 命令行方式

命令行方式是直接在命令窗口输入命令行来实现计算或作图功能。例如，对下面的例题：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$。

首先打开MATLAB界面,在命令窗口输入下列命令行:

```
>> A=[1 2 -3;5 0 2;1 -1 1];
>> B=[3 1 2;4 2 5;2 0 3];
>> A+B
```

运算结果如图9.2所示。

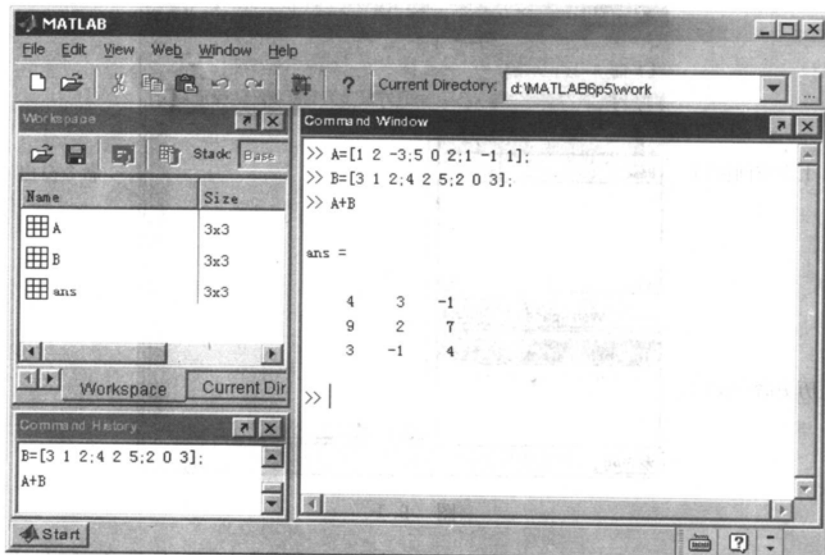


图 9.2

下面对MATLAB命令输入格式作一个简单介绍。

- “>>”是MATLAB的命令提示符,表示后面是输入的MATLAB命令。
- 输入的MATLAB命令后面如果有分号“;”,表示不在命令窗口上输出结果;如果命令后面没有分号,命令窗口上会输出结果。

② M文件方式

在MATLAB窗口中单击菜单栏上的“File”选项,在弹出的下拉菜单中单击“New”选项,选择“M-File”命令,打开M文件的输入运行窗口,如图9.3所示,在该窗口中输入程序文件,可以进行调试和运行。与命令行方式相比,M文件方式的优点是可调试、可以重复应用。

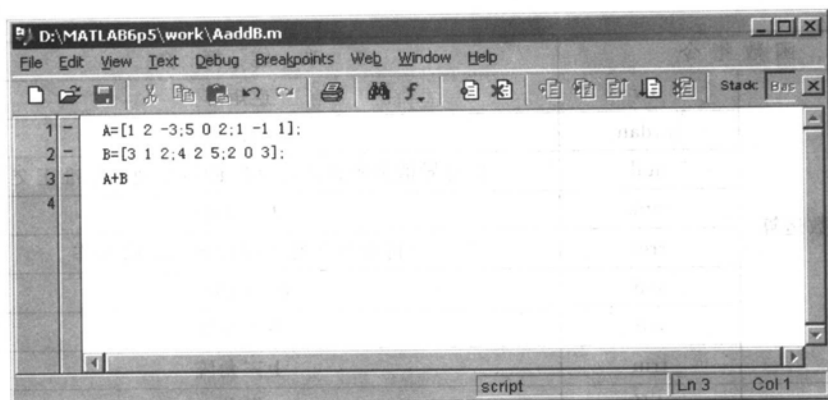


图 9.3

9.2 MATLAB 的矩阵运算

MATLAB 具有强大的矩阵运算功能，MATLAB 6.5 提供了大量的矩阵符号运算函数，表 9.1 列出了常用的矩阵符号运算函数。

表 9.1 常用的 MATLAB 矩阵符号运算函数

函数指令		功能简介
算术运算	+	加
	−	减
	*	乘
	/	右除
	\	左除
	^	求幂
	'	复共轭转置
	.'	转置
线性代数运算	colspace	矩阵列向量的标准正交基
	det	行列式
	diag	创建或提取对角阵
	eig	求本征向量和本征值
	expm	求矩阵的指数幂

续表

函数指令		功能简介
线性代数运算	inv	逆矩阵
	jordan	约当标准型
	null	由奇异值分解得出的矩阵的零空间的标准正交基
	rank	矩阵的秩
	rref	将矩阵转换为逐行递减的阶梯阵
	svd	奇异值分解
	tril	下三角阵
	triu	上三角阵
微积分	diff	微分
	int	积分
	jacobian	雅可比矩阵
简化	collect	合并同幂项系数
	expand	多项式展开
	factor	多变量多项式的因式分解
	simple	简化

下面将逐一介绍和本书相关的几种矩阵运算方法。为了便于读者进行对照，部分算例选用了前几章例题。

1. 符号矩阵的建立

MATLAB有两种方法创建符号矩阵。

(1) 通过sym指令创建符号矩阵

```
>> A=sym('[a b c;0 1 0;0 0 1]')
A =
  [ a, b, c]
  [ 0, 1, 0]
  [ 0, 0, 1]
```

(2) 先通过syms指令定义符号矩阵中的符号变量，再直接创建符号矩阵

```
>> syms a b c;
>> A=[a b c;0 1 0;0 0 1]
A =
  [ a, b, c]
  [ 0, 1, 0]
  [ 0, 0, 1]
```

2. 符号矩阵的加减乘除求幂

MATLAB 中符号矩阵的加法、减法、乘法以及求幂都很直观，使用也非常方便。只是除法比较特殊，有左除(\)和右除(/)两种运算，需要理解两者之间的区别。

X = A\B 主要用于求解线性方程 A * X=B

X = B/A 主要用于求解线性方程 X * A=B

例 9.1 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$时，求 $\boldsymbol{A}^2$。

解

```
>> syms a b
>> A=[1 a b;0 1 a;0 0 1];
>> result=A^2
  result =
    [    1,     2 * a, 2 * b+a^2]
    [    0,         1,      2 * a]
    [    0,         0,          1]
```

在 MATLAB 命令窗口中的运行结果如图 9.4 所示。

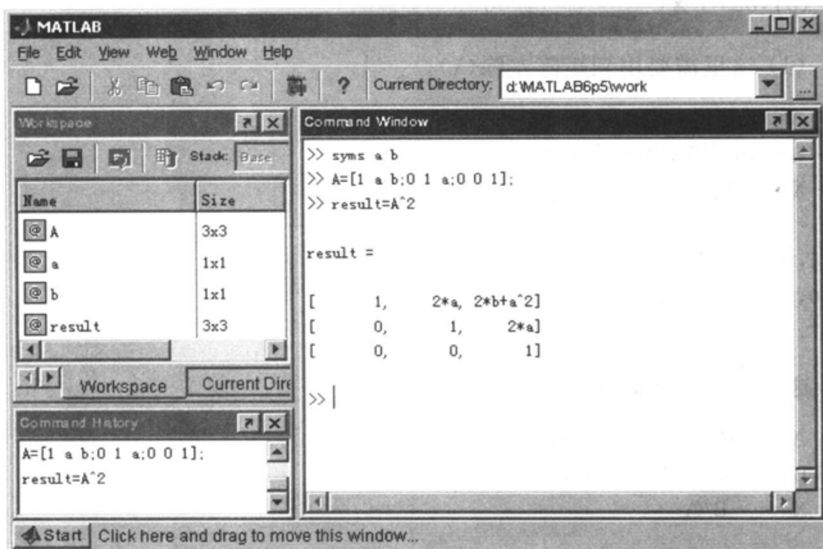


图 9.4

例 9.2 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & -1 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$，求 $2\boldsymbol{A}^8-3\boldsymbol{A}^5+\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{I}$（同例 2.10）。

解

```
>> A=sym('[1 0 2;0,-1 1;0 1 0]');
>> I=eye(3);
>> Result=2*A^8-3*A^5+A^4+A^2-4*I
 Result =
   [-3,    48,    26]
   [ 0,    95,   -61]
   [ 0,   -61,    34]
```

这里用到了函数 eye(n)，这个函数返回一个 n 阶单位矩阵。另外还需要指出的是，当矩阵中某一行的元素带有正负号时，元素前面应该用逗号与前一个元素隔开，否则 MATLAB 会以为是两个数相加减，导致最终运算错误。

例 9.3 求下列矩阵 $\boldsymbol{X}$。

(1) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & -1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\1 & -2 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=0$；

(2) $(b1,b2)+\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}a11 & a12\\a21 & a22\end{pmatrix}=0$。

解 (1) 这里需要用到矩阵左除(\)。

```
>> A=sym('[-2 0 1;1, -2,-1]');
>> B=sym('[1 2 3;3, -1 2]');
>> X=-A\B
 X =
 [4, 1, 5]
 [0, 0, 0]
 [7, 0, 7]
```

(2) 这里需要用到矩阵右除(/)。

```
>> A = sym('[a11 a12; a21 a22]');
>> B = sym('[b1 b2]');
>> X = -B/A
 X =
 [(-a22*b1+b2*a21)/(a12*a21-a11*a22), (a12*b1-a11*b2)/(a12*a21-a11
 *a22)]
```

为了验证计算结果，我们把计算得到的 $\boldsymbol{X}$ 代入方程。

```
>> Result=B+X*A
  Result =

    [b1-(a22*b1-b2*a21)/(-a12*a21+a11*a22)*a11+(a12*b1-a11*b2)/
    (-a12*a21+a11*a22)*a21,
    b2-(a22*b1-b2*a21)/(-a12*a21+a11*a22)*a12+(a12*b1-a11*b2)/
    (-a12*a21+a11*a22)*a22]
>> simplify(Result)
  ans =
    [0, 0]
```

证明计算结果正确。

从上面的计算过程可以看出，矩阵符号运算结果常常不是最简化的形式，因此，有必要对运算结果进行简化。常用的简化指令有 simplify、factor、expand、combine 等，读者可以从 MATLAB 的帮助文件中了解这些命令的用法。

3. 矩阵的指数幂

求矩阵 **A** 的指数幂 e^A 的函数是

$$R = \text{expm}(A)$$

例 9.4 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，求 e^{At}。

解

```
>> syms t;
>> A=sym('[0 1;-1 0]');
>> R=expm(A*t)
  R =
    [  cos(t), sin(t)]
    [-sin(t), cos(t)]
```

4. 矩阵的行列式值

求矩阵 **A** 的行列式值 $|\boldsymbol{A}|$ 的函数是

$$R=\det(A)$$

例 9.5 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$ 的行列式值 $|\boldsymbol{A}|$。

解

```
>> A=sym('[a 1 0;b 1 0;0 1 c]');
```

```
>> R=det(A)
 R =
   a*c-b*c
```

5. 方阵的逆阵

有两种方法求方阵的逆阵：一是使用求幂的方法（幂指数为−1）；二是使用函数inv()。

例9.6　求方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 4\\1 & 4 & 3\end{pmatrix}$ 的逆阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$（同例2.2）。

解　用求幂的方法：

```
>> A=sym('[1 2 3;1 3 4;1 4 3]');
>> Result=A^(-1)
 Result =
   [  7/2, -3,  1/2]
   [ -1/2,  0,  1/2]
   [ -1/2,  1, -1/2]
```

或者使用函数inv()：

```
>> A=sym([1 2 3;1 3 4;1 4 3]);
>> Result=inv(A)
 Result =
   [  7/2, -3,  1/2]
   [ -1/2,  0,  1/2]
   [ -1/2,  1, -1/2]
```

6. 转置矩阵

矩阵的实转置运算符为“.'”，复共轭转置（Hermition转置）的运算符为“'”。

例9.7　求方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\-\sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}$ 的实转置矩阵和复共轭转置。

解　求实转置矩阵：

```
>> A= sym('[cos(t) sin(t); -sin(t) cos(t)]');
>> Result=A.'
 Result =
   [ cos(t), -sin(t)]
   [ sin(t),  cos(t)]
```

求复共轭转置矩阵：

```
>> Result=A'
  Result =
    [ cos(conj(t)), -sin(conj(t))]
    [ sin(conj(t)),   cos(conj(t))]
```

7. 矩阵的本征值与本征矢量

求矩阵 **A** 的本征值与本征矢量的函数为

$$[V,E] = eig(A)$$

V 的每一列代表一个本征矢量，**E** 是一个以本征值为对角元素的对角阵。

例 9.8 求矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$的本征值与本征矢量(同例 2.3)。

解

```
>> A=sym('[1,-i;i,1]');
>> [v,e]=eig(A)
  v =
    [ i, -i]
    [ 1,  1]
  e =
    [ 0, 0]
    [ 0, 2]
```

所以本征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=2$。对于本征值 0 的本征矢量为 $c\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$，对于本征值 2 的本征矢量为 $c\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$($c$ 为非零任意数)。

8. 矩阵的对角化

矩阵的对角化可以用求约当标准型的方法：

$$[P,J]=jordan(A)$$

P 给出符号矩阵 **A** 的广义本征向量，J 给出相应的约当标准型。

例 9.9 把下面的矩阵化为对角形矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -12 & 1 \end{pmatrix} \quad (同例 2.6)$$

解

```
>> A=sym('[1 2 2;1,-1 1;4,-12 1]');
>> [P,J]=jordan(A)
  P =
    [    6, -5/2+5/2*i, -5/2-5/2*i]
    [    2,   -1+1/2*i,   -1-1/2*i]
    [ -2,        1-3*i,       1+3*i]
  J =
    [ 1, 0,   0]
    [ 0, i,   0]
    [ 0, 0, -i]
```

9. 矩阵的微分

对矩阵进行微分的函数是

R = diff(A,'x')

表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对 x 的微分。

在矩阵和张量运算中，常常需要求矩阵的偏微分矩阵，即雅可比矩阵。MATLAB也提供了相应的函数：

R = jacobian(w,v)

用来计算矩阵 $\boldsymbol{w}$ 对 v 的偏微分矩阵。

例9.10 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x1*\sin(x2)*\cos(x3) \\ x1*\sin(x2)*\sin(x3) \\ x1*\cos(x2) \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=(x1,x2,x3)。$$

求$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}x1}$和矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对 $\boldsymbol{B}$ 的偏微分矩阵。

解 (1) 求$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x1}$

```
>> A=sym('[x1*sin(x2)*cos(x3);x1*sin(x2)*sin(x3);x1*cos(x2)]');
>> R=diff(A,'x1')
  R =
    [ sin(x2)*cos(x3)]
    [ sin(x2)*sin(x3)]
    [         cos(x2)]
```

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对 $\boldsymbol{B}$ 的偏微分矩阵

```
>> A=sym('[x1*sin(x2)*cos(x3);x1*sin(x2)*sin(x3);x1*cos(x2)]');
>> B=sym('[x1 x2 x3]');
```

```
>> R = jacobian(A,B)
  R =
    [ sin(x2) * cos(x3), x1 * cos(x2) * cos(x3), -x1 * sin(x2) * sin(x3)]
    [ sin(x2) * sin(x3), x1 * cos(x2) * sin(x3),  x1 * sin(x2) * cos(x3 )]
    [ cos(x2),           -x1 * sin(x2),                                 0]
```

9.3 MATLAB 的张量运算

MATLAB 本身没有张量运算的函数,但是可以调用 MAPLE 的张量包(tensor)进行运算。在运算中借助 maple 指令,把张量包的函数命令送往 MAPLE 引擎计算,格式为:>> maple('函数名');或者借助 procread 指令把整段 MAPLE 程序送往 MAPLE 计算,本章采取第一种方法。

在进行张量运算之前,先要调用 MAPLE 张量包,命令为

```
>> maple('with(tensor)');
```

张量包中的符号运算函数如表 9.2 所示。

表 9.2 张量运算函数

函数指令	功能简介
act	对张量元素进行操作
antisymmetrize	反对称张量
change_basis	基变换
Christoffel1	第 1 类 Christoffel 符号
Christoffel2	第 2 类 Christoffel 符号
commutator	矢量转换
compare	张量比较
conj	复共轭
connexF	系数连接
contract	缩并
convertNP	黎曼张量转换成 Newmann-Penrose 形式
cov_diff	协变微分
Create	创建张量对象
d1metric	第一次偏导数
d2metric	第二次偏导数
directional_diff	方向导数
display_allGR	列出广义相对论的所有对象

续表

函数指令	功能简介
displayGR	列出广义相对论的一个对象
dual	对张量指标进行双重操作
Einstein	Einstein 张量
entermetric	输入张量元素
exterior_diff	外部微分
exterior_prod	外乘
geodesic_eqns	测地线的 Euler-Lagrange 方程
get_char	得到张量的指标
get_compts	得到张量的元素
get_rank	求张量的秩
invars	黎曼曲率张量不变量
invert	张量(2 阶)的逆
Jacobian	坐标变换的雅可比矩阵
Killing_eqns	Killing's 方程
Levi_Civita	Levi_Civita 伪张量
Lie_diff	对矢量的 Lie 导数
lin_com	张量线性合并
lower	降指标
npcurve	曲率张量
npspin	Debever 形式的 Newmann-Penrose 旋量
partial_diff	张量的偏微分
permute_indices	指标排列
petrov	4 次多项式分类
prod	内/外积(点积/并乘)
raise	升指标
Ricci	Ricci 张量
Ricciscalar	Ricci 标量
Riemann	黎曼张量
RiemannF	黎曼曲率张量
symmetrize	全对称张量
tensorsGR	计算广义相对论对象
transform	坐标变换
Weyl	Weyl 张量

1. 创建张量对象

张量包使用了它自定义的一种数据类型——张量类型。张量用一个表结构进行描述:

```
TABLE( index_char,compts)
```

compts 存放张量对象的各个元素; index_char 表示一个值为 1 和 −1 的序列,用来说明对象的协变和逆变指标。1 表示逆变指标,−1 表示协变指标。例如,[1,−1,−1,1]表示指标 1 和 4 是逆变指标(用上标表示),2 和 3 表示协变指标(用下标表示)。序列的长度必须与对象的秩数相等。如果张量的秩数为 0(表示标量或者不变量),index_char 就是一个空的序列,即[]。

创建张量对象时必须定义指标序列 index_char 和张量对象元素 compts。在 MATLAB 中调用张量包定义张量的函数为

```
>> maple('T:=create(index_char,compts)')
```

例 9.11 创建一个二阶混合张量。

解

```
>> maple('with(tensor)');
>> maple('A:=create([-1,1],array([[a,b,c],[d,e,f],[g,h,i]]))')
  ans =
     A := TABLE([index_char = [-1, 1],
         compts = matrix([[a, b, c], [d, e, f], [g, h, i]])])
```

例 9.12 创建一个在极坐标系的欧几里得二阶逆变张量。

解

```
>> maple('with(tensor)');
>> maple('A:=create([1,1],array([[1,0,0],[0,1/r^2,0],[0,0,1/(r^2 * sin(theta)^
2)]]));')
  ans =
     A := TABLE([index_char = [1, 1],
       compts = matrix([[1, 0, 0], [0, 1/r^2, 0], [0, 0, 1/r^2/sin(theta)^2]])])
```

2. 缩并

对张量进行缩并的函数是

```
contract(A,[i1,i2,...])
```

A 是一个阶数大于 1 的张量,[i1,i2] 表示一对上标和下标。

例 9.13　二阶张量的缩并。

解

```
>> maple('with(tensor)');
>> maple('T:=create([1,-1], array([[w,x,0],[y,z,0],[0,y^2,x*y*w]]))');
>> maple('contract(T, [1,2])')
  ans =
     TABLE([index_char = [],
       compts = w+z+x*y*w])
```

3. 张量乘积

求张量内积(点积)的函数是

maple('prod(A,B, [ai,bi])')

其中 A,B 是两个张量,[ai,bi] 是一对指标(上标和下标),ai 是张量 A 的上标(下标),bi 是张量 B 的下标(上标)。

求张量外积(并乘)的函数是 maple('prod(T,U)'),张量外积(并乘)不需要给出指标。

例 9.14　计算一个二阶张量和一个一阶张量的内积。

解

```
>> maple('with(tensor)');
>> maple('T:=create([1,-1], array([[w,x,0],[y,z,0],[0,y^2,x*y*w]]))');
>> maple('U:=create([1],array([l,m,n]))');
>> innerprod=maple('prod(T,U,[2,1])')
  innerprod=
     TABLE([index_char = [1],
       compts = vector([w*l+x*m, y*l+z*m, y^2*m+x*y*w*n])])
```

例 9.15　计算两个一阶张量的内积和外积。

解

```
>> maple('with(tensor)');
>> maple('U:=create([1],array([l,m,n]))');
>> maple('V:=create([-1],array([a,b,c]))');
>> innerprod=maple('prod(V,U,[1,1])')
  innerprod =
     TABLE([index_char = [ ],
       compts = a*l+b*m+c*n])
>> outerprod=maple('prod(V,U)')
  outerprod =
```

```
TABLE([index_char = [-1, 1],
  compts = matrix([[a * l, a * m, a * n], [b * l, b * m, b * n], [c * l, c * m, c *
  n]])])
```

4. 协变偏导数

求协变偏导数的函数是 maple(' d1metric(g, coord)'),g 是协变矩阵张量,coord 是坐标变量。

例 9.16 计算 Schwarzchild 张量对坐标[t, r, theta, phi]的协变偏导数。

```
>> maple('with(tensor)');
>> maple('coord := [t, r, theta, phi]');
>> maple('g_compts := array(symmetric,sparse, 1..4, 1..4)');
>> maple('g_compts[1,1] := 1-2 * m/r');
>> maple('g_compts[2,2]:= -1/g_compts[1,1]');
>> maple('g_compts[3,3] := -r^2');
>> maple('g_compts[4,4] := -r^2 * sin(theta)^2:');
>> maple('g := create( [-1,-1], eval(g_compts))')
  ans =
    g := TABLE([index_char = [-1, -1],
         compts = matrix([ [1-2 * m/r, 0, 0, 0],
                          [0, -1/(1-2 * m/r), 0, 0],
                          [0, 0, -r^2, 0],
                          [0, 0, 0, -r^2 * sin(theta)^2]])])
>> maple('d1g:= d1metric (g, coord)')
  ans =
d1g := TABLE([index_char = [-1, -1, -1],
        compts = ARRAY(cf1,[1 .. 4, 1 .. 4, 1 .. 4],
[(1, 1, 1) = 0, (1, 1, 2) = 2 * m/r^2, (1, 1, 3) = 0, (1, 1, 4) = 0,
(1, 2, 1) = 0, (1, 2, 2) = 0, (1, 2, 3) = 0, (1, 2, 4) = 0,
(1, 3, 1) = 0, (1, 3, 2) = 0, (1, 3, 3) = 0, (1, 3, 4) = 0,
(1, 4, 1) = 0, (1, 4, 2) = 0, (1, 4, 3) = 0, (1, 4, 4) = 0,
(2, 1, 1) = 0, (2, 1, 2) = 0, (2, 1, 3) = 0, (2, 1, 4) = 0,
(2, 2, 1) = 0, (2, 2, 2) = 2 * m/(-r+2 * m)^2, (2, 2, 3) = 0, (2, 2, 4) = 0,
(2, 3, 1) = 0, (2, 3, 2) = 0, (2, 3, 3) = 0, (2, 3, 4) = 0,
(2, 4, 1) = 0, (2, 4, 2) = 0, (2, 4, 3) = 0, (2, 4, 4) = 0,
(3, 1, 1) = 0, (3, 1, 2) = 0, (3, 1, 3) = 0, (3, 1, 4) = 0,
(3, 2, 1) = 0, (3, 2, 2) = 0, (3, 2, 3) = 0, (3, 2, 4) = 0,
(3, 3, 1) = 0, (3, 3, 2) = -2 * r, (3, 3, 3) = 0, (3, 3, 4) = 0,
(3, 4, 1) = 0, (3, 4, 2) = 0, (3, 4, 3) = 0, (3, 4, 4) = 0,
(4, 1, 1) = 0, (4, 1, 2) = 0, (4, 1, 3) = 0, (4, 1, 4) = 0,
```

```
(4, 2, 1) = 0, (4, 2, 2) = 0, (4, 2, 3) = 0, (4, 2, 4) = 0,
(4, 3, 1) = 0, (4, 3, 2) = 0, (4, 3, 3) = 0, (4, 3, 4) = 0,
(4, 4, 1) = 0, (4, 4, 2) = -2 * r * sin(theta)^2, (4, 4, 3) = -2 * r^2 * sin(theta) *
cos(theta),(4, 4, 4) = 0])])
```

5. 第1类克里斯托费尔(Christoffel)符号

计算张量的第1类克里斯托费尔符号的函数是

```
maple(' Christoffel1(D1g))')
```

D1g 是张量的协变偏导数。

例 9.17 计算张量的第1类克里斯托费尔符号。

```
>> maple('Christoffel1(D1g)')
  ans =
    TABLE([index_char = [-1, -1, -1],
      compts = ARRAY(cf1,[1 .. 4, 1 .. 4, 1 .. 4],
[(1, 1, 1) = 0, (1, 1, 2) = -m/r^2, (1, 1, 3) = 0, (1, 1, 4) = 0,
(1, 2, 1) = m/r^2, (1, 2, 2) = 0, (1, 2, 3) = 0, (1, 2, 4) = 0,
(1, 3, 1) = 0, (1, 3, 2) = 0, (1, 3, 3) = 0, (1, 3, 4) = 0,
(1, 4, 1) = 0, (1, 4, 2) = 0, (1, 4, 3) = 0, (1, 4, 4) = 0,
(2, 1, 1) = m/r^2, (2, 1, 2) = 0, (2, 1, 3) = 0, (2, 1, 4) = 0,
(2, 2, 1) = 0, (2, 2, 2) = m/(-r+2 * m)^2, (2, 2, 3) = 0, (2, 2, 4) = 0,
(2, 3, 1) = 0, (2, 3, 2) = 0, (2, 3, 3) = -r, (2, 3, 4) = 0,
(2, 4, 1) = 0, (2, 4, 2) = 0, (2, 4, 3) = 0, (2, 4, 4) = -r * sin(theta)^2,
(3, 1, 1) = 0, (3, 1, 2) = 0, (3, 1, 3) = 0, (3, 1, 4) = 0,
(3, 2, 1) = 0, (3, 2, 2) = 0, (3, 2, 3) = -r, (3, 2, 4) = 0,
(3, 3, 1) = 0, (3, 3, 2) = r, (3, 3, 3) = 0, (3, 3, 4) = 0,
(3, 4, 1) = 0, (3, 4, 2) = 0, (3, 4, 3) = 0, (3, 4, 4) = -r^2 * sin(theta) * cos(theta),
(4, 1, 1) = 0, (4, 1, 2) = 0, (4, 1, 3) = 0, (4, 1, 4) = 0,
(4, 2, 1) = 0, (4, 2, 2) = 0, (4, 2, 3) = 0, (4, 2, 4) = -r * sin(theta)^2,
(4, 3, 1) = 0, (4, 3, 2) = 0, (4, 3, 3) = 0, (4, 3, 4) = -r^2 * sin(theta) * cos(theta),
(4, 4, 1) = 0, (4, 4, 2) = r * sin(theta)^2, (4, 4, 3) = r^2 * sin(theta) * cos(theta),
(4, 4, 4) = 0])])
```

6. 偏导数和方向导数

求张量对给定坐标的偏导数的函数是

```
maple(' partial_diff(g, coord)')
```

g 是张量,coord 表示坐标。

计算标量场沿逆变矢量场 V 的方向对坐标 coord 的方向导数，需要用到下面的函数：

```
maple(' directional_diff( f, V, coord)')
```

f 表示标量场，V 表示逆变矢量场，coord 表示坐标。

例 9.18 计算偏导数。

```
>> maple('with(tensor)');
>> maple('coord := [r, theta, psi]');
>> maple('V := create( [], H( r,theta,psi ) )');
>> maple('part_V := partial_diff( V, coord )')
  ans =
  part_V := TABLE([index_char = [-1],
    compts = vector([diff(H(r,theta,psi),r), diff(H(r,theta,psi),theta), diff(H(r,
theta,psi),psi)])])
```

例 9.19 计算方向导数。

```
>> maple('coord:=[x,y,z]');
>> maple('f:= 3 * x/(y+z)');
>> maple('V:= create([1], array([x * y, y * z, z * x]))');
>> maple('directional_diff(f, V, coord)')
  ans =
    -3 * x * (-y^2+z * x)/(y+z)^2
```

7. 基变换

对张量作基变换的函数是

```
maple(' change_basis( T, h, hinv) ')
```

$\boldsymbol{T}$ 是需作基变换的张量；$\boldsymbol{h}$ 是一个指标序列为[1,-1] 的张量，表示基变换的协变换矩阵；hinv 是一个指标序列为[-1,1] 的张量，表示基变换的逆变换矩阵。

例 9.20 张量 $\boldsymbol{T}$ 作基变换。

```
>> maple('with(tensor)');
>> maple('T_compts := array(1..2,1..2,[[T11,T12],[T21,T22]])');
>> maple('T := create( [1,-1], op(T_compts) )')
  ans =
  T := TABLE([index_char = [1, -1],
      compts = matrix([[T11, T12],
                       [T21, T22]])])
>> maple('h := create([1,-1],array(1..2,1..2,[[H11,H12],[H21,H22]]))')
```

```
ans =
h := TABLE([index_char = [1, -1],
      compts = matrix([[H11, H12],
                        [H21, H22]])])
>> maple('hinv := create([-1,1],array(1..2,1..2,[[h11,h12],[h21,h22]]));')
ans =
hinv := TABLE([index_char = [-1, 1],
      compts = matrix([[h11, h12],
                        [h21, h22]])])
>> maple('NewT := change_basis( T, h, hinv )')
ans =
NewT := TABLE([index_char = [1, -1]],
         compts=matrix([
    [h11 * H11 * T11+h11 * H12 * T21+h12 * H11 * T12+h12 * H12 * T22, h21 *
    H11 * T11+h21 * H12 * T21+h22 * H11 * T12+h22 * H12 * T22], [h11 * H21
    * T11+h11 * H22 * T21+h12 * H21 * T12+h12 * H22 * T22, h21 * H21 * T11
    +h21 * H22 * T21+h22 * H21 * T12+h22 * H22 * T22]]),)
```

由于篇幅限制，本章只介绍几种常用的张量运算函数和命令。如果需要了解更多的张量包中函数的用法，利用命令

```
>> mhelp tensor[函数名]
```

可以查看该函数的具体用法。

习　　题

用MATLAB求解下面的习题，要求写出MATLAB命令行。

9.1 求矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 2 & 3\\ 4 & 8 & 12 & 16\\ 0 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ 的秩。

9.2 求矩阵 $\begin{pmatrix}t+1 & t\\ 0 & t+5\end{pmatrix}$ 与 $\dfrac{1}{(t+2)(t+5)}$ 的乘积。

9.3 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}e & f\\ g & h\end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$。

9.4 求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}8 & 2 & -1\\1 & 6 & 2\\2 & -1 & 1\end{bmatrix}$；(2) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$。

9.5 求下列矩阵的本征值与本征矢量：

(1) $\begin{bmatrix}2 & 4 & 2\\4 & 8 & 4\\2 & 4 & 2\end{bmatrix}$；(2) $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1/2\\0 & 0 & 0\\2 & 0 & -1\end{bmatrix}$。

9.6 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$，求 e^{At}。

9.7 求矩阵 $\begin{bmatrix}2 & -i & 3\\1 & 2i & 2\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ 的行列式值。

9.8 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}$，计算 $(\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}$。

9.9 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-i & 1-2i\\2 & 1\end{bmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵、共轭矩阵以及复共轭矩阵。

9.10 求 $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\begin{bmatrix}x\sin(y) & x^n+y\\ \dfrac{1}{xy} & e^{ixy}\end{bmatrix}$。

9.11 求矩阵 $\begin{bmatrix}xyz\\xy\\yz\end{bmatrix}$ 对 $(x \quad y \quad z)$ 的偏微分。

9.12 把矩阵 $\begin{bmatrix}1/2 & -i\\i & 1/2\end{bmatrix}$ 转化为对角矩阵。

9.13 解方程 $\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{X}+\begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 4\end{bmatrix}=0$

9.14 解方程 $\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 4\end{bmatrix}=0$

9.15 求矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$ 列向量的标准正交基。

9.16 在 MATLAB 中生成一个五阶的单位矩阵和一个四阶的随机矩阵。

9.17 查看 MATLAB 帮助文件，学习在 MATLAB 中如何生成下列特殊矩阵：

(1) Hankel 矩阵；

(2) Hadamard 矩阵；

(3) Hilbert 矩阵；

(4) Toeplitz 矩阵。

9.18 在 MATLAB 中利用 MAPLE 的张量包生成一个零阶张量(标量)$[a]$，一个一阶张量(矢量)(x,y,z)，一个二阶张量(矩阵)$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$。

9.19 在 MATLAB 中利用 MAPLE 的张量包计算二阶张量$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & xy & z \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$和一阶张量$(m,l,n)$的内积。

9.20 列出 MAPLE 的张量包的各个函数及其功能。

附录 A
示范例题

张量概念

1. 用求和约定改写下列各式：

(a) $\mathrm{d}\phi=\dfrac{\partial\phi}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1+\dfrac{\partial\phi}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+\cdots+\dfrac{\partial\phi}{\partial x^N}\mathrm{d}x^N$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}\bar{x}^k}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^1}\dfrac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^2}\dfrac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}+\cdots+\dfrac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^N}\dfrac{\mathrm{d}x^N}{\mathrm{d}t}$

(c) $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+\cdots+(x^N)^2$

(d) $\mathrm{d}s^2=g_{11}(\mathrm{d}x^1)^2+g_{22}(\mathrm{d}x^2)^2+g_{33}(\mathrm{d}x^3)^2=g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j,g_{ij}=0,\ i\neq j$

(e) $\sum\limits_{p=1}^{3}\sum\limits_{q=1}^{3}g_{pq}\mathrm{d}x^p\mathrm{d}x^q$

解 (a) $\mathrm{d}\phi=\dfrac{\partial\phi}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}\bar{x}^k}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$

(c) $x^ix^j\delta_{ij}$

(d) $\mathrm{d}s^2=g_{kk}\mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^k$，$k=1,2,3$

(e) $g_{pq}\mathrm{d}x^p\mathrm{d}x^q$ （三维空间 $N=3$）

2. 将下列求和约定的表示式写成多项求和表示式：

(a) $a_{jk}x^k$； (b) $A_{pq}A^{qr}$； (c) $\bar{g}_{rs}=g_{jk}\dfrac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^r}\dfrac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^s}$ （三维空间 $N=3$）。

解 (a) $\sum_{k=1}^{N} a_{jk}x^k = a_{j1}x^1 + a_{j2}x^2 + \cdots + a_{jN}x^N$

(b) $\sum_{q=1}^{N} A_{pq}A^{qr} = A_{p1}A^{1r} + A_{p2}A^{2r} + \cdots + A_{pN}A^{Nr}$

(c)
$$\begin{aligned}
\bar{g}_{rs} &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^s} \\
&= \sum_{j=1}^{3}\left(g_{j1}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s} + g_{j2}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s} + g_{j3}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s}\right) \\
&= g_{11}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s} + g_{21}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s} + g_{31}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s} \\
&\quad + g_{12}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s} + g_{22}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s} + g_{32}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s} \\
&\quad + g_{13}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s} + g_{23}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s} + g_{33}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s}
\end{aligned}$$

3. 在直角坐标系 $x^k, k=1,2,\cdots,N$ 中，下列各方程当 $N=2,3$ 或 $N\geqslant 4$ 时表示什么轨迹？设这些函数是单值、连续可微、独立的。

解 (a) $a_k x^k = 1$，式中 a_k 是常数。

$N=2$ 时，$a_1x^1 + a_2x^2 = 1$，是二维空间的一条线，即平面中的一条线。

$N=3$ 时，$a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 = 1$，是三维空间中的一个平面。

$N\geqslant 4$ 时，$a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N = 1$，是超平面。

(b) $x^k x^k = 1$

$N=2$ 时，$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$，是平面中单位半径的圆。

$N=3$ 时，$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$，是半径为单位长度的球面。

$N\geqslant 4$ 时，$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^N)^2 = 1$，是半径为单位长度的超球面。

(c) $x^k = x^k(u)$

$N=2$ 时，$x^1 = x^1(u), x^2 = x^2(u)$，是平面曲线的参数方程。

$N=3$ 时，$x^1 = x^1(u), x^2 = x^2(u), x^3 = x^3(u)$，是三维空间的曲线。

$N\geqslant 4$ 时，$x^1 = x^1(u), x^2 = x^2(u), \cdots, x^N = x^N(u)$，是 N 维空间的曲线。

(d) $x^k = x^k(u,v)$

$N=2$ 时，$x^1 = x^1(u,v), x^2 = x^2(u,v)$，是将 (u,v) 变换到 (x^1, x^2) 的坐标变换。

$N=3$ 时，$x^1 = x^1(u,v), x^2 = x^2(u,v), x^3 = x^3(u,v)$，是三维表面的 u,v 参数方程。

$N\geqslant 4$ 时，是超表面。

逆变矢量、协变矢量和张量

4. 写出下列张量的变换律：(a) $A^{i}{}_{\cdot jk}$；(b) $B^{mn}{}_{\cdot\cdot ijk}$；(c) C^{m}。

解 (a) $\bar{A}^{p}{}_{\cdot qr}=\dfrac{\partial\bar{x}^{p}}{\partial x^{i}}\dfrac{\partial x^{j}}{\partial\bar{x}^{q}}\dfrac{\partial x^{k}}{\partial\bar{x}^{r}}A^{i}{}_{\cdot jk}$

(b) $\bar{B}^{pq}{}_{\cdot\cdot rst}=\dfrac{\partial\bar{x}^{p}}{\partial x^{m}}\dfrac{\partial\bar{x}^{q}}{\partial x^{n}}\dfrac{\partial x^{i}}{\partial\bar{x}^{r}}\dfrac{\partial x^{j}}{\partial\bar{x}^{s}}\dfrac{\partial x^{k}}{\partial\bar{x}^{t}}B^{mn}{}_{\cdot\cdot ijk}$

(c) $\bar{C}^{p}=\dfrac{\partial\bar{x}^{p}}{\partial x^{m}}C^{m}$

5. $A(j,k,l,m)$是坐标 x^{i}的函数，变换到其他坐标系时，符合下列变换律：

$$\bar{A}(p,q,r,s)=\frac{\partial x^{j}}{\partial\bar{x}^{p}}\frac{\partial\bar{x}^{q}}{\partial x^{k}}\frac{\partial\bar{x}^{r}}{\partial x^{l}}\frac{\partial\bar{x}^{s}}{\partial x^{m}}A(j,k,l,m)$$

(a)A 是不是张量？(b)若是，写出该张量符号；(c)给出逆变和协变的阶数和秩。

解 (a) 是张量；(b) $A^{klm}_{\cdot\cdot\cdot j}$；(c) 三阶逆变，一阶协变，3+1=4 秩。

6. 试问下列的量是不是张量？若是，问其是逆变还是协变？并给出其秩。(a) $\mathrm{d}x^{k}$；(b) $\dfrac{\partial\phi(x^{1},x^{2},\cdots,x^{N})}{\partial x^{k}}$。

解 (a) 设坐标变换 $\bar{x}^{j}=\bar{x}^{j}(x^{1},x^{2},\cdots,x^{N})$，于是 $\mathrm{d}\bar{x}^{j}=\dfrac{\partial\bar{x}^{j}}{\partial x^{k}}\mathrm{d}x^{k}$，所以 $\mathrm{d}x^{k}$ 是一阶逆变张量或逆变矢量。注意 k 应是上标。

(b) 在 $x^{k}=z^{k}(\bar{x}^{1},\bar{x}^{2},\cdots,\bar{x}^{N})$的变换下，$\phi$ 是 x^{k} 的函数，因而也是 $\bar{x}^{j}$ 的函数，于是 $\phi(x^{1},x^{2},\cdots,x^{N})=\bar{\phi}(\bar{x}^{1},\bar{x}^{2},\cdots,\bar{x}^{N})$，即 ϕ 是标量或不变量(零阶张量)。根据求偏导数的链式规则，$\dfrac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{x}^{j}}=\dfrac{\partial\phi}{\partial\bar{x}^{j}}=\dfrac{\partial\phi}{\partial x^{k}}\dfrac{\partial x^{k}}{\partial\bar{x}^{j}}=\dfrac{\partial x^{k}}{\partial\bar{x}^{j}}\dfrac{\partial\phi}{\partial x^{k}}$，于是$\dfrac{\partial\phi}{\partial x^{k}}$的变换像 $\bar{A}_{j}=\dfrac{\partial x^{k}}{\partial\bar{x}^{j}}A_{k}$ 一样，所以$\dfrac{\partial\phi}{\partial x^{k}}$是一阶协变张量或协变矢量。

注意：跑标出现在$\dfrac{\partial\phi}{\partial x^{k}}$的分母里，其作用犹如下标而表示了协变特性，具有分量$\dfrac{\partial\phi}{\partial x^{k}}$的张量如同 ϕ 的梯度 gradϕ 一样，写成 gradϕ 或$\nabla\phi$。

7. 一协变张量，在直角坐标系中具有分量 $xy,2y-z^{2},xy$，试求在球坐标系中的协变分量。

解 令 A_{j} 表示张量在直角坐标系 $x^{1}=x,x^{2}=y,x^{3}=z$ 中的协变分量，则

$$A_{1}=x^{1}x^{2},\quad A_{2}=2x^{2}-(x^{3})^{2},\quad A_{3}=x^{1}x^{3}$$

应当注意上标和幂的区别。

令 $\bar{A}_k$ 表示张量在球坐标系 $\bar{x}^1=r, \bar{x}^2=\theta, \bar{x}^3=\phi$，则

$$\bar{A}_k = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} A_j \tag{A.1}$$

两种坐标系之间的变换关系是

$$x^1 = \bar{x}^1 \sin\bar{x}^2 \cos\bar{x}^3$$
$$x^2 = \bar{x}^1 \sin\bar{x}^2 \sin\bar{x}^3$$
$$x^3 = \bar{x}^1 \cos\bar{x}^2$$

由式(A.1)可得所求的协变分量

$$\begin{aligned}
\bar{A}_1 &= \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1}A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1}A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1}A_3 \\
&= (\sin\bar{x}^2\cos\bar{x}^3)(x^1x^2) + (\sin\bar{x}^2\sin\bar{x}^3)(2x^2-(x^3)^2) \\
&\quad + (\cos\bar{x}^2)(x^1x^3) \\
&= (\sin\theta\cos\phi)(r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi) \\
&\quad + (\sin\theta\cos\varphi)(2r\sin\theta\sin\varphi - r^2\cos^2\theta) \\
&\quad + (\cos\theta)(r^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{A}_2 &= \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2}A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2}A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2}A_3 \\
&= (r\cos\theta\cos\varphi)(r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi) \\
&\quad + (r\cos\theta\sin\varphi)(2r\sin\theta\sin\varphi - r^2\cos^2\theta) \\
&\quad + (-r\sin\theta)(r^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{A}_3 &= \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3}A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3}A_2 + \frac{\partial^3}{\partial \bar{x}^3}A_3 \\
&= (-r\sin\theta\sin\varphi)(r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi) \\
&\quad + (r\sin\theta\cos\varphi)(2r\sin\theta\sin\varphi - r^2\cos^2\theta) \\
&\quad + (0)(r^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi)
\end{aligned}$$

8. 即使 A_p是一阶协变张量，试证$\frac{\partial A_p}{\partial x^q}$不是张量。

证 由假设 $\bar{A}_j=\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}A_p$，对 $\bar{x}^k$ 求导。即

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{A}_j}{\partial \bar{x}^k} &= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial A_p}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}A_p \\
&= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial A_p}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j}A_p \\
&= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial A_p}{\partial x^q} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j}A_p
\end{aligned}$$

因为等式右边出现了第二项，$\dfrac{\partial A_p}{\partial x^q}$不符合张量的变换律。

9. 试证任一点的场速度是一阶逆变张量。

证 任一点的场速度在坐标系 x^k 中有分量$\dfrac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}$，在坐标系 $\bar{x}^j$ 中，速度为$\dfrac{\mathrm{d}\bar{x}^j}{\mathrm{d}t}$。根据链式求导规则，有

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}^j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}$$

这表示速度是一阶逆变张量或逆变矢量。

克罗内克符号 δ

10. 计算(a) $\delta^p_q A^{qr}_s$；(b) $\delta^p_q \delta^q_r$。

解 因为 $\delta^p_q = \begin{cases} 1, p=q \\ 0, p\neq q \end{cases}$，故有

(a) $\delta^p_q A^{qr\cdots}_{\cdots s} = A^{pr\cdots}_{\cdots s}$；(b) $\delta^p_q \delta^q_r = \delta^p_r$。

11. 试证$\dfrac{\partial x^p}{\partial x^q}=\delta^p_q$。

证 若 $p=q$，$\dfrac{\partial x^p}{\partial x^q}=1$，因为 $x^p=x^q$$\left(若\ p\neq q, \dfrac{\partial x^p}{\partial x^q}=0，因为\ x^p\ 与\ x^q\ 无关\right)$，所以

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^q} = \delta^p_q$$

12. 试证$\dfrac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q}\dfrac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^r}=\delta^p_r$。

证 坐标 x^p 是坐标 $\bar{x}^q$ 的函数，$\bar{x}^q$ 又是 x^r 的函数，所以 x^p 是 x^r 的函数。根据链式求导规则以及题 10 和题 11 的结果，有

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^r} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^r} = \delta^p_q \delta^q_r = \delta^p_r$$

13. 若 $\bar{A}^p=\dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}A^q$，试证 $A^q=\dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p}\bar{A}^p$。

证 用$\dfrac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}$乘 $\bar{A}^p=\dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}A^q$，则

$$\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}\bar{A}^p = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}A^q = \frac{\partial x^r}{\partial x^q}A^q = \delta^r_q A^q = A^r$$

令 $r=q$，就是本题的结果。上面的证明可用于一般的情况，有横和无横的量可以互换。

14. 证明 δ_q^p 是二阶混合张量。

证 若 δ_q^p 是二阶混合张量，则应符合下面的变换律：

$$\bar{\delta}_k^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\delta_q^p$$

等式右边的$\dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\dfrac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k}=\delta_k^j$(见 12 题)。因为 $\bar{\delta}_k^j=\delta_k^j=1(j=k)$，$\bar{\delta}_k^j=\delta_k^j=0(j\neq k)$，故证明了 δ_q^p 是二阶混合张量，符号用得正合适。

注意，我们有时用 $\delta_{pq}=\begin{cases}1, & p=q\\ 0, & p\neq q\end{cases}$作为克罗内克符号 δ，尽管它不是二阶协逆张量。

张量的基本运算

15. 若 $A_{\cdot\cdot r}^{pq}$和 $B_{\cdot\cdot r}^{pq}$是张量，试证它们的和、差均为张量。

证 因为 $A_{\cdot\cdot r}^{pq}$、$B_{\cdot\cdot r}^{pq}$是张量，所以

$$\bar{A}_{\cdot\cdot l}^{jk} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}A_{\cdot\cdot r}^{pq}$$

$$\bar{B}_{\cdot\cdot l}^{jk} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}B_{\cdot\cdot r}^{pq}$$

相加：

$$\bar{A}_{\cdot\cdot l}^{jk}+\bar{B}_{\cdot\cdot l}^{jk} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}(A_{\cdot\cdot r}^{pq}+B_{\cdot\cdot r}^{pq})$$

相减：

$$\bar{A}_{\cdot\cdot l}^{jk}-\bar{B}_{\cdot\cdot l}^{jk} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}(A_{\cdot\cdot r}^{pq}-B_{\cdot\cdot r}^{pq})$$

所以 $A_{\cdot\cdot r}^{pq}+B_{\cdot\cdot r}^{pq}$ 和 $A_{\cdot\cdot r}^{pq}-B_{\cdot\cdot r}^{pq}$ 是和 $A_{\cdot\cdot r}^{pq}$、$B_{\cdot\cdot r}^{pq}$ 同阶同类型的张量。

16. 若 $A_{\cdot\cdot r}^{pq}$ 和 B_t^s 是张量，试证 $C_{\cdot\cdot\cdot rt}^{pqs} = A_{\cdot\cdot r}^{pq}B_t^s$ 也是张量。

证 因为 $A_{\cdot\cdot r}^{pq}$、B_t^s 是张量，所以

$$\bar{A}_{\cdot\cdot l}^{jk} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}A_{\cdot\cdot r}^{pq}$$

$$\bar{B}_n^m = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^n}B_t^s$$

相乘：

$$\bar{A}_{\cdot\cdot r}^{pq}\bar{B}_n^m = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^n}A_{\cdot\cdot r}^{pq}B_t^s$$

这表明 $A_{\cdot\cdot r}^{pq}B_t^s$ 是 p,q,s 逆变和 r,t 协变的五阶张量，记为 $C_{\cdot\cdot\cdot rn}^{pqs}$。我们称 $C_{\cdot\cdot\cdot rn}^{pqs}$ =

$A^{pq}_{\cdot\cdot r}B^{s}_{t}$ 为 $A^{pq}_{\cdot\cdot r}$ 和 B^{s}_{t} 的外积。

17. 令 $A^{pq}_{\cdot\cdot rst}$ 是一张量，(a) 选 $p=t$，试证 $A^{pq}_{\cdot\cdot rsp}$ 是张量，并问是几阶张量?式中用了求和约定。(b) 选 $p=t$ 和 $q=s$，试证 $A^{pq}_{\cdot\cdot rqp}$ 是张量，它的阶次为多少?

证 (a) 因为 $A^{pq}_{\cdot\cdot rst}$ 是张量，所以

$$\overline{A}^{jk}_{\cdot\cdot lmn}=\frac{\partial\overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}\frac{\partial\overline{x}^{k}}{\partial x^{q}}\frac{\partial x^{r}}{\partial\overline{x}^{l}}\frac{\partial x^{s}}{\partial\overline{x}^{m}}\frac{\partial x^{t}}{\partial\overline{x}^{n}}A^{pq}_{\cdot\cdot rst}\tag{A.2}$$

$$\overline{A}^{jk}_{\cdot\cdot lmj}=\frac{\partial x^{t}}{\partial\overline{x}^{j}}\frac{\partial\overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}\frac{\partial\overline{x}^{k}}{\partial x^{q}}\frac{\partial x^{r}}{\partial\overline{x}^{l}}\frac{\partial x^{s}}{\partial\overline{x}^{m}}A^{pq}_{\cdot\cdot rst}$$

$$=\delta^{t}_{q}\frac{\partial\overline{x}^{k}}{\partial x^{q}}\frac{\partial x^{r}}{\partial\overline{x}^{l}}\frac{\partial x^{s}}{\partial\overline{x}^{m}}A^{pq}_{\cdot\cdot rst}$$

$$=\frac{\partial\overline{x}^{k}}{\partial x^{q}}\frac{\partial x^{r}}{\partial\overline{x}^{l}}\frac{\partial x^{s}}{\partial\overline{x}^{m}}A^{pq}_{\cdot\cdot rsp}$$

$$=\frac{\partial\overline{x}^{k}}{\partial x^{q}}\frac{\partial x^{r}}{\partial\overline{x}^{l}}\frac{\partial x^{s}}{\partial\overline{x}^{m}}B^{q}_{\cdot rs}$$

故 $A^{pq}_{\cdot\cdot rsp}$(即 B^{q}_{rs})是三阶张量。张量中逆变指标与协变指标相同，取代并求和的过程叫做缩并。缩并一次，张量降阶二次。

(b) 令 $j=n$, $k=m$，则式(A.2)为

$$\overline{A}^{jk}_{\cdot\cdot lkj}=\frac{\partial\overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}\frac{\partial\overline{x}^{k}}{\partial x^{q}}\frac{\partial x^{r}}{\partial\overline{x}^{l}}\frac{\partial x^{s}}{\partial\overline{x}^{k}}\frac{\partial x^{t}}{\partial\overline{x}^{j}}A^{pq}_{\cdot\cdot rst}$$

$$=\frac{\partial x^{t}}{\partial\overline{x}^{j}}\frac{\partial\overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}\frac{\partial x^{s}}{\partial\overline{x}^{k}}\frac{\partial\overline{x}^{k}}{\partial x^{q}}\frac{\partial x^{r}}{\partial\overline{x}^{l}}A^{pq}_{\cdot\cdot rst}$$

$$=\delta^{t}_{p}\delta^{s}_{q}\frac{\partial x^{r}}{\partial\overline{x}^{l}}A^{pq}_{\cdot\cdot rst}$$

$$=\frac{\partial x^{r}}{\partial\overline{x}^{l}}A^{pq}_{\cdot\cdot rqp}=\frac{\partial x^{r}}{\partial\overline{x}^{l}}C_{r}$$

$A^{pq}_{\cdot\cdot rqp}$(即 C_r)是一阶张量，两次缩并降阶四次。

18. 试证张量 $A^{p}_{\cdot q}$ 的缩并是标量或不变量。

证

$$\overline{A}^{j}_{\cdot k}=\frac{\partial\overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}\frac{\partial x^{q}}{\partial\overline{x}^{k}}A^{p}_{\cdot q}$$

令 $j=k$ 并求和得

$$\overline{A}^{j}_{\cdot j}=\frac{\partial\overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}\frac{\partial x^{q}}{\partial\overline{x}^{j}}A^{p}_{\cdot q}=\delta^{p}_{q}A^{p}_{q}=A^{p}_{\cdot p}$$

$\overline{A}^{j}_{j}=A^{p}_{\cdot p}$ 是不变量，因 $A^{p}_{\cdot p}$ 是由二阶张量缩并一次而成，二阶张量降阶两次，成为零阶，故可定义不变量为零阶张量。

19. 试证张量 A^{p} 和 B_{q} 外积的缩并是不变量。

证 因 A^{p} 和 B_{q} 是张量，

$$\overline{A}^j = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p} A^p, \quad \overline{B}_k = \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k} B_q$$

则

$$\overline{A}^j \overline{B}_k = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k} A^p B_q$$

缩并(代入 $j=k$ 并求和),得

$$\overline{A}^j \overline{B}_j = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} A^p B_q = \delta_p^q A^p B_q = A^p B_q$$

故得 $A^p B_q$ 是不变量。

张量相乘以及缩并的过程叫做内乘,其结果叫做内积。因为 $A^p B_q$ 是标量,所以通常又称为张量 A^p 和 B_q 的标积。

20. 试证张量 $A^p_{\cdot r}$ 和 $B^{qs}_{\cdot\cdot t}$ 的任一内积是三阶张量。

证 证法一

$A^p_{\cdot r}$ 和 $B^{qs}_{\cdot\cdot t}$ 的外积是 $A^p_{\cdot r} B^{qs}_{\cdot\cdot t}$。

令 $p=t$,缩并,求和。证其结果 $A^p_{\cdot r} B^{qs}_{\cdot\cdot p}$ 是三阶张量。根据假设,

$$\overline{A}^j_{\cdot k} = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k} A^p_{\cdot r}, \quad \overline{B}^{lm}_{\cdot\cdot n} = \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^q} \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^n} B^{qs}$$

相乘,令 $j=n$,求和得

$$\begin{aligned}
\overline{A}^j_{\cdot k} \overline{B}^{lm}_{\cdot\cdot j} &= \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^q} \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^j} A^p_{\cdot r} B^{qs}_{\cdot\cdot t} \\
&= \delta^t_p \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^q} \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^s} A^p_{\cdot r} B^{qs}_{\cdot\cdot t} \\
&= \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^q} \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^s} A^p_{\cdot r} B^{qs}_{\cdot\cdot p}
\end{aligned}$$

上式表明 $A^p_{\cdot r} B^{qs}_{\cdot\cdot p}$ 是三阶张量。同样可证,对 q 和 r 或 s 和 r 缩并,其任意内积都是三阶张量。

证法二

两张量的外积仍是张量,外积张量的阶是两相乘张量阶数的和,故 $A^p_{\cdot r} B^{qs}_{\cdot\cdot t}$ 的阶数是 3+2=5。因为缩并一次,降阶二次,因此,$A^p_{\cdot r} B^{qs}_{\cdot\cdot t}$ 任意缩并一次,张量的阶数是 5−2=3。

21. $B^{qn}_{\cdot\cdot r}$ 为任意张量,若有量 $X(p,q,r)$,使得 $X(p,q,r) B^{qn}_{\cdot\cdot r}=0$,试证 $X(p,q,r)=0$。

证 因 $B^{qn}_{\cdot\cdot r}$ 是任意张量,选一个不为零的特殊分量(例如 $q=2, r=3$ 的其中一个),而其他分量均为零,则 $X(p,2,3) B^{2n}_{\cdot\cdot 3}=0$,因 $B^{2n}_{\cdot\cdot 3} \neq 0$,所以 $X(p,2,3)=0$。同理可选 q 和 r 的所有任意组合,均可得 $X(p,q,r)=0$。故命题得证。

22. $A(p,q,r)$是坐标系 x^i 中的一个量，$A(p,q,r)B^{qs}_{\cdot\cdot r}=C^s_{\cdot p}$，式中 $B^{qs}_{\cdot\cdot r}$是一任意张量，$C^s_{\cdot p}$是二阶张量，试证 $A(p,q,r)$是张量。

证 在变换了的坐标系 $\bar{x}^i$ 中，

$$\bar{A}(j,k,l)\bar{B}^{km}_{\cdot\cdot l}=\bar{C}^m_{\cdot j}$$

于是

$$\bar{A}(j,k,l)\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}B^{qs}_{\cdot\cdot r}=\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^j}C^s_{\cdot p}$$

$$=\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^j}A(p,q,r)B^{qs}_{\cdot\cdot r}$$

或

$$\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^s}\left[\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}\bar{A}(j,k,l)-\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^j}A(p,q,r)\right]B^{qs}_{\cdot\cdot r}=0$$

用$\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^m}$内乘$\left(\text{即用}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^t}\text{乘，并用 } t=m \text{ 缩并}\right)$得

$$\delta^n_s\left[\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}\bar{A}(j,k,l)-\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^j}A(p,q,r)\right]B^{qs}_{\cdot\cdot r}=0$$

或

$$\left[\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}\bar{A}(j,k,l)-\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^j}A(p,q,r)\right]B^{qn}_{\cdot\cdot r}=0$$

因为 B^{qn}_r 是一任意张量，根据上题，有

$$\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^l}\bar{A}(j,k,l)-\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^j}A(p,q,r)=0$$

用$\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^m}\frac{\partial\bar{x}^n}{\partial x^r}$内乘，得

$$\delta^k_m\delta^n_l\bar{A}(j,k,l)-\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^m}\frac{\partial\bar{x}^n}{\partial x^r}A(p,q,r)=0$$

或

$$\bar{A}(j,m,n)=\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^m}\frac{\partial\bar{x}^n}{\partial x^r}A(p,q,r)$$

证明了 $A(p,q,r)$是张量，正好用符号 $A^r_{\cdot\cdot pq}$表示。

本题是商定律的特殊情况，商定律的内容是：若 X 与任意张量 $\boldsymbol{B}$ 的内积是一张量$\boldsymbol{C}$，则 X 是张量。

对称张量和反对称张量

23. 若张量 B^{pqr}_{st} 在一个坐标系中关于 p 和 q 是对称的（反对称的），试证明它在任一坐标系中关于 p 和 q 仍保持对称（反对称）。

证 因为只涉及指标 p 和 q，我们也只要就 B^{pq} 作证明。

(a) 若 B^{pq} 是对称的，

$$B^{pq} = B^{qp}$$

则

$$\bar{B}^{jk} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} B^{pq} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} B^{qp} = \bar{B}^{kj}$$

同理可证在 $\bar{x}^i$ 坐标系中 B_{pq} 也保持对称。

(b) 若 B^{pq} 是反对称的，

$$B^{pq} = -B^{qp}$$

则

$$\bar{B}^{jk} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} B^{pq} = -\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q} B^{qp} = -\bar{B}^{kj}$$

也可证明在 $\bar{x}^i$ 坐标系中 B_{pq} 保持反对称。

上述结论，当然对其他的对称（反对称）张量都有效。

24. 试证：每个张量都可表示为一对协变或逆变对称张量与反对称张量之和。

证 考察张量 B^{pq}，有

$$B^{pq} = \frac{1}{2}(B^{pq} + B^{qp}) + \frac{1}{2}(B^{pq} - B^{qp})$$

但

$$R^{pq} = \frac{1}{2}(B^{pq} + B^{qp}) = R^{qp}$$

是对称的，

$$S^{pq} = \frac{1}{2}(B^{pq} - B^{qp}) = -S^{qp}$$

是反对称的。

同理，上述结论对任何张量都成立。

$$B = \frac{1}{2}(B + B^{\mathrm{T}}) + \frac{1}{2}(B - B^{\mathrm{T}}) = R + S$$

R 是对称的，S 是反对称的。

25. 若 $\Phi = a_{jk}A^jA^k$，试证：通常能将该式写成 $\Phi = b_{jk}A^jA^k$，式中 b_{jk} 是对称的。

证 $\Phi = a_{jk}A^jA^k = a_{kj}A^kA^j = a_{kj}A^jA^k$，则

$$2\Phi = a_{jk}A^jA^k + a_{kj}A^jA^k = (a_{jk} + a_{kj})A^jA^k$$

且

$$\Phi = \frac{1}{2}(a_{jk} + a_{kj})A^jA^k = b_{jk}A^jA^k$$

式中

$$b_{jk} = \frac{1}{2}(a_{jk} + a_{kj}) = b_{kj}$$

是对称的。

矩　　阵

26. 写出矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\4&-2&3\\-2&1&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-4&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$ 的和 $S=A+B$，差 $D=A-B$，积 $P=AB$，$Q=BA$。

解

$$S=A+B=\begin{pmatrix}3&1&-2\\4&-2&3\\-2&1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&-1\\-4&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1&-3\\0&-1&5\\-1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$D=A-B=\begin{pmatrix}3&1&-2\\4&-2&3\\-2&1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&-1\\-4&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\8&-3&1\\-3&2&-1\end{pmatrix}$$

$$P=AB=\begin{pmatrix}3&1&-2\\4&-2&3\\-2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&-1\\-4&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&-1\\19&-5&-8\\-9&2&4\end{pmatrix}$$

$$Q=BA=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-4&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&-2\\4&-2&3\\-2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&1&-3\\-12&-4&9\\-1&3&-5\end{pmatrix}$$

表明 $AB\neq BA$，矩阵的乘法一般是不可交换的。

27. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}$，试证 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$。

证 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -4 & 5\end{pmatrix}$，于是

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 14\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -5 & 8\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -6\\ -9 & 10\end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -5 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7 & -6\\ -9 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 11\\ -4 & -2\end{pmatrix}$$

因此 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$，但 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{B}^2$。

28. 用矩阵符号写出变换方程：(a)协变矢量，(b)二阶逆变张量，设 $N=3$。

解 (a) 变换方程 $\overline{A}_p=\dfrac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^p}A_q$，可写成

$$\begin{pmatrix}\overline{A}_1\\ \overline{A}_2\\ \overline{A}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^1}\\ \dfrac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^2}\\ \dfrac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^3} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^3} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix}$$

可以用上述的列矢量表示，同样也可用行矢量表示。

$$(\overline{A}_1\quad \overline{A}_2\quad \overline{A}_3)=(A_1\quad A_2\quad A_3)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^1} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^2} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^3}\\ \dfrac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^3}\\ \dfrac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^3}\end{pmatrix}$$

(b) 变换方程 $\overline{A}^{pr}=\dfrac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^q}\dfrac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^s}A^{qs}$ 可写成

$$\begin{pmatrix}\overline{A}^{11} & \overline{A}^{12} & \overline{A}^{13}\\ \overline{A}^{21} & \overline{A}^{22} & \overline{A}^{23}\\ \overline{A}^{31} & \overline{A}^{32} & \overline{A}^{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^3}\\ \dfrac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^3}\\ \dfrac{\partial \overline{x}^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \overline{x}^3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \overline{x}^3}{\partial x^3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{11} & A^{12} & A^{13}\\ A^{21} & A^{22} & A^{23}\\ A^{31} & A^{32} & A^{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \overline{x}^3}{\partial x^1}\\ \dfrac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \overline{x}^3}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^3} & \dfrac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^3} & \dfrac{\partial \overline{x}^3}{\partial x^3}\end{pmatrix}$$

这些结论可推广到 $N>3$ 的情况，但是对于高阶张量，用矩阵符号是失败的。

线元和度量张量

29. 若 $ds^2=g_{jk}dx^jdx^k$ 是不变量，试证 g_{jk} 是二阶协变张量。

证 由例 25，$\Phi=ds^2$，$A^j=dx^j$ 和 $A^k=dx^k$，g_{jk} 可以选为对称的。还因为 ds^2 是不变量，

$$\bar{g}_{pq}d\bar{x}^pd\bar{x}^q=g_{jk}dx^jdx^k=g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^p}d\bar{x}^p\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^q}d\bar{x}^q$$

$$=g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^q}d\bar{x}^pd\bar{x}^q$$

于是

$$\bar{g}_{pq}=\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^q}g_{jk}$$

所以 g_{jk} 是二阶对称协变张量，称为度量张量。

30. 试求：(a) 柱面坐标系，(b) 球面坐标系中的度量张量的矩阵表达式。

解 (a) 柱面坐标系

$$x=\rho\mathrm{cso}\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z$$

$$dx=-\rho\sin\varphi d\varphi+\cos\varphi d\rho$$

$$dy=\rho\cos\varphi d\varphi+\sin\varphi d\rho$$

$$dz=dz$$

$$\begin{aligned}ds^2&=dx^2+dy^2+dz^2\\&=(-\rho\sin\varphi d\varphi+\cos\varphi d\rho)^2\\&\quad+(\rho\cos\varphi d\varphi+\sin\varphi d\rho)^2+(dz)^2\\&=(d\rho)^2+\rho^2(d\varphi)^2+(dz)^2\end{aligned}$$

若 $x^1=\rho,x^2=\varphi,x^3=z$，则 $g_{11}=1,g_{22}=\rho^2,g_{33}=1$，其余均为零。故度量张量的矩阵形式为

$$g_{jk}=\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\rho^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(b) 球面坐标系

$$x=r\sin\theta\mathrm{cso}\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta$$

$$dx=-r\sin\theta\sin\varphi d\varphi+r\cos\theta\cos\varphi d\theta+\sin\theta\cos\varphi dr$$

$$dy=r\sin\theta\cos\varphi d\varphi+r\cos\theta\sin\varphi d\theta+\sin\theta\sin\varphi dr$$

$$dz = -r\sin\theta d\theta + \cos\theta dr$$

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

$$= (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(d\varphi)^2$$

若 $x^1=r, x^2=\theta, x^3=\varphi$，则度量张量的矩阵表达式可写成

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

一般，对于正交坐标系，$g_{jk}=0(j\neq k)$。

31. (a) 用第二行及其余子式表示行列式 $g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$；

(b) 说明 $g_{jk}G(j,k)=g$，式中 $G(j,k)$ 是 g 中 g_{jk} 的余子式，这里只对 k 求和。

解 (a) g_{jk} 的余子式是从行列式 g 中划去 g_{jk} 所在的行和列而得的行列式，并带有 $(-1)^{j+k}$ 的正负号，于是

$$g_{21}\text{ 的余子式} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

$$g_{22}\text{ 的余子式} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix}$$

$$g_{23}\text{ 的余子式} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix}$$

将这些余子式分别记为 $G(2,1)$、$G(2,2)$、$G(2,3)$。由行列式的基本原理，得

$$g_{21}G(2,1) + g_{22}G(2,2) + g_{23}G(2,3) = g$$

(b) 应用(a)的结果于任意行或列，有 $g_{jk}G(j,k)=g$，式中只对 k 求和。

这个结论对 N 阶行列式 $g=|g_{jk}|$ 均有效。

32. (a) 试证 $g_{21}G(3,1)+g_{22}G(3,2)+g_{23}G(3,3)=0$；

(b) 试证 $g_{jk}G(p,k)=0\ (j\neq p)$。

证 (a) $\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{vmatrix}=0$

因为后两行相同，按最后一行展开该行列式有

$$g_{21}G(3,1) + g_{22}G(3,2) + g_{23}G(3,3) = 0$$

(b) 若行列式中任意两行（或列）相同，由(a)证明的结果可知 $g_{jk}G(p,k)=0$ $(j\neq p)$，该结论对 N 阶行列式均有效。

33. 定义 $g^{jk}=\dfrac{G(j,k)}{g}$，式中 $G(j,k)$ 是 g_{jk} 的余子式，且行列式 $g=|g_{jk}|\neq 0$，试

证 $g_{jk}g^{pk}=\delta_j^p$。

证 由例 31 知 $g_{jk}\dfrac{G(j,k)}{g}=1$，或 $g_{jk}g^{jk}=1$，式中只对 k 求和。

由例 32 知 $g_{jk}\dfrac{G(p,k)}{g}=0$ 或 $g_{jk}g^{pk}=0$（若 $p\neq j$），于是 $g_{jk}g^{pk}=\delta_j^p=\begin{cases}1, & p=j\\0, & p\neq j\end{cases}$。
虽然我们已经用了符号 g^{jk}，但并未说明它的意义，也未证明它是二阶逆变张量。例题 34 将要证明它是张量。注意余子式写成 $G(j,k)$，而不写成 G^{jk}，因为在通常的意义下，它不是张量。而在下面的例题中就证明了它是二阶逆变张量，用符号 G^{jk} 的概念展开张量正合适。

34. 试证 g^{jk} 是二阶对称逆变张量。

证 因为 g_{jk} 是对称的，$G(j,k)$ 是对称的，所以 $g^{jk}=\dfrac{G(j,k)}{g}$ 是对称的。若 B^p 是一任意逆变矢量，$B_q=g_{pq}B^p$ 是任意协变矢量，用 g^{jp} 乘上式，有

$$g^{jp}B_q = g^{jp}g_{pq}B^p = \delta_p^jB^p = B^j$$

或

$$B^j = g^{jq}B_q$$

因为 B_q 是任意矢量，由商定律可知，g^{jq} 是二阶逆变张量，张量 g^{jk} 叫做共轭度量张量。

35. 求以下两种坐标系中的共轭度量张量：(a)柱面坐标系和(b)球面坐标系。

解 (a) 由例 30(a)，有

$$g=|g_{jk}|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&\rho^2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=\rho^2$$

$$g^{11}=\frac{g_{11}\text{ 的余子式}}{g}=\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix}\rho^2&0\\0&1\end{vmatrix}=1$$

$$g^{22}=\frac{g_{22}\text{ 的余子式}}{g}=\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=\frac{1}{\rho^2}$$

$$g^{33}=\frac{g_{33}\text{ 的余子式}}{g}=\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix}1&0\\0&\rho^2\end{vmatrix}=1$$

$$g^{12}=\frac{g_{12}\text{ 的余子式}}{g}=\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}=0,\quad g^{jk}=0,\ j\neq k$$

故得柱面坐标系中共轭度量张量的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/\rho^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(b) 由例 30(b),有

$$g=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{vmatrix}=r^4\sin^2\theta$$

与(a)相似,可求得

$$g^{11}=1,\quad g^{22}=1/r^2,\quad g^{33}=1/r^2\sin^2\theta$$

而 $g^{jk}=0(j\neq k)$,所以球面坐标系中的共轭度量张量的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/r^2 & 0\\ 0 & 0 & 1/r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}$$

36. 试求符合 $ds^2=5(dx^1)^2+3(dx^2)^2+4(dx^3)^2-6dx^1dx^2+4dx^2dx^3$ 的 g 和 g^{jk}。

解 (a) $g_{11}=5, g_{22}=3, g_{33}=4, g_{12}=-3, g_{23}=2, g_{12}=g_{21}, g_{23}=g_{32}, g_{13}=g_{31}=0$,所以

$$g=\begin{vmatrix}5 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{vmatrix}=4$$

(b) g_{jk} 的余子式 $G(j,k)$ 是

$G(1,1)=8,\quad G(2,2)=20,\quad G(3,3)=6,\quad G(1,2)=G(2,1)=12,$

$G(2,3)=G(3,2)=-10,\quad G(1,3)=G(3,1)=-6$

则有

$$g^{11}=2,\quad g^{22}=10,\quad g^{33}=3/2,\quad g^{12}=g^{21}=3,$$
$$g^{23}=g^{32}=-5/2,\quad g^{13}=g^{31}=-3/2$$

注意:矩阵(g_{jk})和(g^{jk})的积是单位矩阵 $\boldsymbol{I}$,即

$$\begin{pmatrix}5 & -3 & 0\\ -3 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & -3/2\\ 3 & 10 & -5/2\\ -3/2 & -5/2 & 3/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

相伴张量

37. 若 $A_j=g_{jk}A^k$,试证 $A^k=g^{jk}A_j$。

证 用 g^{jq} 乘 $A_j=g_{jk}A^k$ 等式的两边,得

$$g^{jq}A_j=g^{jq}g_{jk}A^k=\delta^q_kA^k=A^q$$

即

$$A^q=g^{jq}A_j$$

或

$$A^k = g^{jk}A_j$$

称一阶张量 A_j 和 A^k 为相伴，它们分别表示矢量的协变和逆变矢量。

38. 试证：(a) $L^2 = g_{pq}A^pA^q$ 是不变量；(b) $L^2 = g^{pq}A_pA_q$。

证 (a) 令 A_j 和 A^k 分别是矢量的协变和逆变矢量，则

$$\bar{A}_p = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p}A_j, \quad \bar{A}^q = \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^k}A^k$$

$$\bar{A}_p\bar{A}^p = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^k}A_jA^k = \delta^j_k A_jA^k = A_kA^k = A_jA^j$$

所以 A_jA^j 是不变量，记为 L^2，L^2 可写成

$$L^2 = A_jA^j = g_{jk}A^kA^j = g_{pq}A^pA^q$$

(b) 由上述表明 $L^2 = A_jA^j = A_jg^{kj}$，$A_k = g^{kj}A_jA_k = g^{pq}A_pA_q$，标量或不变量 $L = \sqrt{A_pA^p}$ 称为具有协变分量 A_p 和逆变分量 A^q 的矢量的大小或长度。

39. 若 A^p 和 B^q 是矢量，试证：

(a) $g_{pq}A^pB^q$ 是不变量；

(b) $\dfrac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}}$ 是不变量。

证 (a) 因为两矢量的标积是不变量，即 A^pB_p 是不变量，所以

$$A^pB_p = A^pg_{pq}B^q = g_{pq}A^pB^q$$

是不变量。

(b) 因为 A^pA_p 和 B^qB_q 是不变量，$g_{pq}A^pB^q$ 是不变量，所以

$$\frac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}}$$

是不变量。

定义

$$\cos\theta = \frac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}}$$

为矢量 A^p 和 B^q 之间夹角的余弦，若 $g_{pq}A^pB^q = A^pB_p = 0$，则两矢量叫做正交的。

40. 建立下列相伴张量的关系：

(a) A^{jkl} 和 A_{pqr}；(b) $A_j{}^{\cdot k}{}_{\cdot l}$ 和 A^{qkr}；(c) $A^{p\cdot rs\cdot}{}_{\cdot q\cdot\cdot t}$ 和 $A_{jqk}{}^{\cdots sl}$。

解 (a) $A^{jkl} = g^{jp}g^{kq}g^{lr}A_{pqr}$ 或 $A_{pqr} = g_{jp}g_{kq}g_{lr}A^{jkl}$

(b) $A_j{}^{\cdot k}{}_{\cdot l} = g_{jq}g_{lr}A^{qkr}$ 或 $A^{qkr} = g^{jq}g^{lr}A_j{}^{\cdot k}{}_{\cdot l}$

(c) $A^{p\cdot rs}{}_{\cdot q\cdot\cdot t} = g^{pj}g^{rk}g_{tl}A_{jqk}{}^{\cdots sl}$ 或 $A_{jqk}{}^{\cdots sl} = g_{pj}g_{rk}g^{tl}A^{p\cdot rs}{}_{\cdot q\cdot\cdot t}$

41. 试证在三维曲线坐标系中 θ_{12}，θ_{23} 和 θ_{31} 的余弦是

$$\cos\theta_{12}=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},\quad \cos\theta_{23}=\frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}},\quad \cos\theta_{31}=\frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}}$$

证 方法一

沿曲线坐标 x^1，$x^2=$常数，$x^3=$常数，则构成度量形式

$$ds^2=g_{11}(dx^1)^2$$

或

$$\frac{dx^1}{ds}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}$$

于是沿 x^1 的单位切矢量为

$$A_1^r=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\delta_1^r$$

类似地可得沿曲线坐标 x^2，x^3 的单位切矢量分别为

$$A_2^r=\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta_2^r,\quad A_3^r=\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\delta_3^r$$

A_1^r 和 A_2^r 之间夹角的余弦

$$\cos\theta_{12}=g_{pq}A_1^pA_2^q=g_{pq}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta_1^p\delta_2^q=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$$

同理可证后两式。

方法二

$$g_1\cdot g_2=|g_1||g_2|\cos\theta_{12},\quad \cos\theta_{12}=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}$$

42. 试证正交坐标系中 $g_{12}=g_{23}=g_{31}=0$。

证 用 $\theta_{12}=\theta_{23}=\theta_{31}=90°$代入题41中，即可得命题的结论。并可用 $g_{pq}=g_{qp}$ 的事实，得 $g_{21}=g_{32}=g_{13}=0$

43. 试证正交坐标系中 $g_{11}=\frac{1}{g^{11}}$，$g_{22}=\frac{1}{g^{22}}$，$g_{33}=\frac{1}{g^{33}}$。

证 从题33可知

$$g^{pr}g_{rq}=\delta_q^p$$

若 $p=q=1$，$g^{1r}g_{r1}=1$ 或 $g^{11}g_{11}+g^{12}g_{21}+g^{13}g_{31}=1$，因为

$$g_{pq}=0\ (p\neq q)$$

故有

$$g^{11}g_{11}=1$$

即

$$g_{11}^r=\frac{1}{g^{11}}$$

同理可证，若

$$p = q = 2$$

有

$$g_{22} = \frac{1}{g^{22}}$$

若

$$p = q = 3$$

有

$$g_{33} = \frac{1}{g^{33}}$$

克里斯托费尔符号

44. 证明：(a) $[pq,r]=[qp,r]$；(b) $\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} s \\ qp \end{Bmatrix}$；(c) $[pq,r]=g_{rs}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}$。

证 证法一

(a) $$[pq,r]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q}+\frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p}+\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q}-\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right)=[qp,r]$$

(b) $$\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=g^{sr}[pq,r]=g^{sr}[qp,r]=\begin{Bmatrix} s \\ qp \end{Bmatrix}$$

(c) $g_{ks}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=g_{ks}g^{sr}[pq,r]=\delta_k^r[pq,r]=[pq,k]$或$[pq,k]=g_{ks}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}$，即

$$[pq,r]=g_{rs}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}$$

证法二

因为

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}=\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}\boldsymbol{g}_k,\quad \frac{\partial \boldsymbol{g}^k}{\partial x^j}=-\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}\boldsymbol{g}^i$$

所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}\cdot \boldsymbol{g}^k=\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix},\quad \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}\cdot \boldsymbol{g}_k=g_{kr}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix}\boldsymbol{g}^r$$

$$\{ij,k\}=g_{kr}\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial x^j}=\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial r}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial r}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial g_j}{\partial x^i}$$

$$\{ij,k\}=\{ji,k\},\quad \begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}k\\ji\end{Bmatrix}$$

45. 试证：

(a) $\dfrac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}=[pm,q]+[qm,p]$；

(b) $\dfrac{\partial g^{pq}}{\partial x^m}=-g^{pm}\begin{Bmatrix}q\\mn\end{Bmatrix}-g^{qn}\begin{Bmatrix}p\\mn\end{Bmatrix}$；

(c) $\begin{Bmatrix}p\\pq\end{Bmatrix}=\dfrac{\partial}{\partial x^q}\ln\sqrt{g}$。

证

(a) $$[pm,q]+[qm,p]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{mq}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{pm}}{\partial x^q}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{mp}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{qm}}{\partial x^q}\right)=\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}$$

(b) $$\frac{\partial}{\partial x^m}(g^{jk}g_{ij})=\frac{\partial}{\partial x^m}(\delta_i^k)=0$$

即

$$g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}+\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}g_{ij}=0$$

$$g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}=-\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}g_{ij}$$

用 g^{ir} 乘等式的两边，得

$$g^{ir}g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}=-g^{ir}g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}$$

$$\delta_i^r\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}=\frac{\partial g^{rk}}{\partial x^m}=-g^{ir}g^{jk}([im,j]+[jm,i])$$

$$=-g^{ir}\begin{Bmatrix}k\\im\end{Bmatrix}-g^{ik}\begin{Bmatrix}r\\jm\end{Bmatrix}$$

用 p,q,n,n 代替 r,k,i,j，得

$$\frac{\partial g^{pq}}{\partial x^m}=-g^{pn}\begin{Bmatrix}q\\nm\end{Bmatrix}-g^{qn}\begin{Bmatrix}p\\nm\end{Bmatrix}=-g^{pm}\begin{Bmatrix}q\\mn\end{Bmatrix}-g^{qn}\begin{Bmatrix}p\\mn\end{Bmatrix}$$

(c) 根据题 31，$g=g_{jk}G(j,k)$（只对 k 求和）。因为 $G(j,k)$ 不包含 g_{jk}，且 $\dfrac{\partial g}{\partial g_{jk}}=G(j,k)$，于是对 j 和 r 求和，得

$$\frac{\partial g}{\partial x^m}=\frac{\partial g}{\partial g_{jk}}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m}=G(j,k)\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m}$$

$$= g\, g^{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} = g\, g^{jk}([jm,k] + [km,j])$$

$$= g\left(\begin{Bmatrix} j \\ jm \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k \\ km \end{Bmatrix}\right) = 2g\begin{Bmatrix} k \\ km \end{Bmatrix}$$

于是

$$\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^m} = \begin{Bmatrix} k \\ km \end{Bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{Bmatrix} p \\ pq \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x^q}\ln\sqrt{g}$$

46. 推导(1)第一类和(2)第二类克里斯托费尔符号的变换律。

解 (1) 因为 $\bar{g}_{jk} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} g_{pq}$，所以

$$\text{(a)} \quad \frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial \bar{x}^m} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^m} g_{pq} + \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} g_{pq}$$

对指标 j,k,m 和 p,q,r 进行依序轮换，有

$$\text{(b)} \quad \frac{\partial \bar{g}_{km}}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^j} g_{qr} + \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} g_{qr}$$

$$\text{(c)} \quad \frac{\partial \bar{g}_{mj}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial g_{rp}}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} g_{rp} + \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} g_{rp}$$

式(b)加式(c)，减去式(a)，再乘以$\frac{1}{2}$，利用第一类克里斯托费尔符号的定义，可得

$$\text{(d)} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{g}_{km}}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial \bar{g}_{mj}}{\partial \bar{x}^k} - \frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial \bar{x}^m}\right) = \overline{[jk,m]}$$

$$\text{等式右边} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{rp}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right) + \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^m} g_{pq}$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}[pq,r] + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m} g_{pq}$$

(2) 用 $\bar{g}^{nm} = \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t} g^{st}$ 乘式(d)，得

$$\bar{g}^{nm}\overline{[jk,m]} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t} g^{st}[pq,r] + \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t} g^{st} g_{pq}$$

于是

$$\overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\delta^r_t g^{st}[pq,r] + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\delta^q_t g^{st} g_{pq}$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^p}$$

因为

$$\delta^q_t g^{st}[pq,r] = g^{sr}[pq,r] = \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}$$

所以

$$\delta_t^r g^{st} g_{pq} = g^{sq} g_{pq} = \delta_p^s$$

47. 试证$\dfrac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} = \left\{ \begin{matrix} \bar{n} \\ jk \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n} - \dfrac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \left\{ \begin{matrix} m \\ pq \end{matrix} \right\}$。

证 由例题 46 知

$$\left\{ \begin{matrix} \bar{n} \\ jk \end{matrix} \right\} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s} \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^p}$$

用$\dfrac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n}$乘上式，得

$$\left\{ \begin{matrix} \bar{n} \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \delta_s^m \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \delta_p^m$$

故有

$$\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} = \left\{ \begin{matrix} \bar{n} \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n} - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \left\{ \begin{matrix} m \\ pq \end{matrix} \right\}$$

48. 求 $g_{pq}=0$(若 $p \neq q$)的空间中的(a)第一类和(b)第二类克里斯托费尔符号的值。

解 (a) 若 $p=q=r$，则

$$[pq,r] = [pp,p] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}$$

若 $p=q \neq r$，则

$$[pq,r] = [pp,r] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{pr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}$$

若 $p=r \neq q$，则

$$[pq,r] = [rq,r] = [pq,p] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^p} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}$$

若 p,q,r 互异，则$[pq,r]=0$(此处不用求和约定)。

(b) 由 43 题有 $g^{jj} = \dfrac{1}{g_{jj}}$，于是有

若 $r \neq s$，则

$$\left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} = g^{sr}[pq,r]$$

若 $r=s$，则

$$g^{ss}[pq,s] = \frac{[pq,s]}{g_{ss}} \text{（不求和）}$$

若 $p=q=s$，则

$$\left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} p \\ pp \end{matrix} \right\} = \frac{[pp,p]}{g_{pp}} = \frac{1}{2g_{pp}} \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^p} \ln g_{pp}$$

若 $p=q\neq s$，则

$$\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} s \\ pp \end{Bmatrix}=\frac{[pp,s]}{g_{ss}}=-\frac{1}{2g_{ss}}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^s}$$

若 $p=s\neq q$，则

$$\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p \\ pq \end{Bmatrix}=\frac{[pq,p]}{g_{pp}}=\frac{1}{2g_{pp}}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^g}\ln g_{pp}$$

若 p,q,s 互异，则

$$\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=0$$

49. 求以下坐标系中第二类克里斯托费尔符号的表示式：(a)直角坐标系，(b)柱面坐标系，(c)球面坐标系。

解 利用题 48 的结果，因为直角坐标系中，若 $p\neq q$ 时，$g_{pq}=0$，所以

(a) 直角坐标系中 $g_{pp}=1$，即 $\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=0$。

(b) 柱面坐标系中 $x^1=\rho,x^2=\varphi,x^3=z$。由题 30 得 $g_{11}=1,g_{22}=\rho^2,g_{33}=1$，不为零的克里斯托费尔符号只出现在 $p=2$ 时，

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix}=g^{1r}[22,r]=g^{11}[22,1]=\frac{1}{g^{11}}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial\rho^2}{\partial\rho}=-\rho$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix}=g^{2r}[21,r]=g^{22}[21,2]$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\rho^2}{\partial\rho}\right)=\frac{1}{\rho}$$

还可直接算得，其他 24 个都为零。

(c) 球面坐标系中，$x^1=r,x^2=\theta,x^3=\varphi$。由题 30(2)可知

$$g_{11}=1,\quad g_{22}=r^2,\quad g_{33}=r^2\sin^2\theta$$

不为零的克里斯托费尔符号出现在 $p=2$ 或 3 时，于是有

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix}=g^{1r}[22,r]=g^{11}[22,1]=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial r}=-r$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix}=g^{2r}[21,r]=g^{22}[21,2]=\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)$$

$$= \frac{1}{r} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 33 \end{Bmatrix} = g^{1r}[33, r] = g^{11}[33, 1] = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin^2\theta) = -r\sin^2\theta$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 33 \end{Bmatrix} = g^{2r}[33, r] = g^{22}[33, 2] = \frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}$$

$$= \frac{-1}{2r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}(r^2 \sin^2\theta) = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 31 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 13 \end{Bmatrix} = g^{33}[13, 3] = \frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}$$

$$= \frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin^2\theta) = \frac{1}{r}$$

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 32 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 23 \end{Bmatrix} = g^{33}[32, 3] = \frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(r^2 \sin^2\theta)$$

$$= \cot\theta$$

其余的均为零。

测 地 线

50. 试证 $I = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x})\,\mathrm{d}t$ 有极值(极大值或极小值)的必要条件是 $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0$。

证 设曲线 $x = X(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 使得 I 有极值。经过 t_1 和 t_2 两点与 I 相邻的曲线是 $x = X(t) + \varepsilon\eta(t)$, $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$,与 I 相邻的曲线的值是

$$I(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, X + \varepsilon\eta, \dot{X} + \varepsilon\dot{\eta})\,\mathrm{d}t$$

$\varepsilon = 0$ 时有极值,而必要条件为 $\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$,由在积分号下的微分运算得

$$\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\eta + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}\right)\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F}{\partial x}\eta\,\mathrm{d}t + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\eta\right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\eta\left[\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right]\mathrm{d}t=0$$

因为η是任意数，故有

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)=0$$

这一结论很容易推广到积分$\int_{t_1}^{t_2}F(t,x^1,\dot{x}^1,x^2,\dot{x}^2,\cdots,x^N,\dot{x}^N)\mathrm{d}t$有极值的必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial x^k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k}\right)=0$$

该式称为欧拉或拉格朗日方程(见题 73)。

51. 试证黎曼空间的测地线是$\frac{\mathrm{d}^2x^r}{\mathrm{d}s^2}+\begin{Bmatrix} r \\ pq \end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}s}=0$。

证 利用具有$F=\sqrt{g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q}$的欧拉方程(题 50)求$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q}\mathrm{d}t$的极值，

$$\frac{\partial F}{\partial x^k}=\frac{1}{2}(g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q)^{-1/2}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k}=\frac{1}{2}(g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q)^{-1/2}\cdot 2g_{pk}\dot{x}^p$$

利用$\dot{s}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}-\sqrt{g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q}$，欧拉方程可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{g_{pk}\dot{x}^p}{\dot{s}}\right)-\frac{1}{2\dot{s}}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q=0$$

或

$$g_{pk}\ddot{x}^p+\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q}\dot{x}^p\dot{x}^q-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q=\frac{g_{pk}\dot{x}^p\ddot{s}}{\dot{s}}$$

令

$$\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q}\dot{x}^p\dot{x}^q=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q}+\frac{\partial g_{qk}}{\partial x^p}\right)\dot{x}^p\dot{x}^q$$

于是上式成为

$$g_{pk}\ddot{x}^p+[pq,k]\dot{x}^p\dot{x}^q=\frac{g_{pk}\dot{x}^p\ddot{s}}{\dot{s}}$$

若用弧长作参数，$\dot{s}=1$，$\ddot{s}=0$，则方程成为

$$g_{pk}\frac{\mathrm{d}^2x^p}{\mathrm{d}s^2}+[pq,k]\frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}s}=0$$

用g^{rk}乘等式两边得

$$\frac{\mathrm{d}^2x^r}{\mathrm{d}s^2}=\begin{Bmatrix} r \\ pq \end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}s}=0$$

协变导数

52. 若 A_p 和 A^p 是张量，试证以下各项是张量：(a) $A_{p,q} \equiv \dfrac{\partial A_p}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} A_s$；(b) $A^p_{,q} \equiv \dfrac{\partial A^p}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} p \\ qs \end{Bmatrix} A^s$。

证 (a) 因为 $\overline{A}_j = \dfrac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^j} A_r$，

$$\frac{\partial \overline{A}_j}{\partial \overline{x}^k} = \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial A_r}{\partial x^t} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial \overline{x}^j \overline{x}^k} A_r \tag{A.3}$$

由题 47 知

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial \overline{x}^j \overline{x}^k} = \overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^n} - \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^k} \begin{Bmatrix} r \\ il \end{Bmatrix}$$

代入式(A.3)，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{A}_j}{\partial \overline{x}^k} &= \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial A_r}{\partial x^t} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k} + \overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^n} - \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^k} \begin{Bmatrix} r \\ il \end{Bmatrix} \\ &= \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial A_p}{\partial x^q} + \overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}} \overline{A}_n - \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k} \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} A_s\end{aligned}$$

或

$$\frac{\partial \overline{A}_j}{\partial \overline{x}^k} - \overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}} \overline{A}_n = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k} \left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} A_s \right)$$

于是证明了$\dfrac{\partial A_p}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} A_s \equiv A_{p,q}$是二阶协变张量，该式叫做 A_p 相对于 x^q 的协变导数。

(b) 因

$$\overline{A}^j = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^r} A^r$$

$$\frac{\partial \overline{A}^j}{\partial \overline{x}^k} = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^r} \frac{\partial A^r}{\partial x^t} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k} + \frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^r \partial x^t} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k} A^r \tag{A.4}$$

将 47 题中的 x 与 $\overline{x}$ 互换，有

$$\frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^r \partial x^t} = \begin{Bmatrix} n \\ rt \end{Bmatrix} \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^n} - \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^t} \overline{\begin{Bmatrix} j \\ il \end{Bmatrix}}$$

代入式(A.4)，得

$$\frac{\partial \bar{A}^j}{\partial \bar{x}^k}=\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial A^r}{\partial x^t}+\begin{Bmatrix} n \\ rt \end{Bmatrix}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}A^r-\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\overline{\begin{Bmatrix} j \\ il \end{Bmatrix}}A^r$$

$$=\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial A^r}{\partial x^t}+\begin{Bmatrix} n \\ rt \end{Bmatrix}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}A^r-\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\delta^l_k\overline{\begin{Bmatrix} j \\ il \end{Bmatrix}}A^r$$

$$=\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial A^p}{\partial x^q}+\begin{Bmatrix} p \\ sq \end{Bmatrix}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}A^s-\overline{\begin{Bmatrix} j \\ ik \end{Bmatrix}}\bar{A}^i$$

$$\frac{\partial \bar{A}^j}{\partial \bar{x}^k}+\overline{\begin{Bmatrix} j \\ ik \end{Bmatrix}}\bar{A}^i=\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\left(\frac{\partial A^p}{\partial x^q}+\begin{Bmatrix} p \\ sq \end{Bmatrix}A^s\right)$$

可见 A^p 相对于 x^q 的协变导数 $A^p_{,q}\equiv\frac{\partial A^p}{\partial x^q}+\begin{Bmatrix} p \\ sq \end{Bmatrix}A^s$ 是二阶混合张量。

53. 写出下列张量相对于 x^q 的协变导数：

(a) A_{jk}；(b) A^{jk}；(c) $A^j_{\cdot k}$；(d) $A^j_{\cdot kl}$；(c) $A^{jkl}_{\cdots mn}$。

解 (a) $A_{jk,q}=\frac{\partial A_{jk}}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix} s \\ jq \end{Bmatrix}A_{sk}\quad\begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}A_{js}$

(b) $A^{jk}_{\cdot\cdot q}=\frac{\partial A^{jk}}{\partial x^q}+\begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^{sk}+\begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix}A^{js}$

(c) $A^j_{\cdot k,q}=\frac{\partial A^j_{\cdot k}}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}A^j_{\cdot s}+\begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^s_{\cdot k}$

(d) $A^j_{\cdot kl,q}=\frac{\partial A^j_{\cdot kl}}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}A^j_{\cdot sl}-\begin{Bmatrix} s \\ lq \end{Bmatrix}A^j_{\cdot ks}+\begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^s_{\cdot kl}$

(e) $A^{jkl}_{\cdots mn,q}=\frac{\partial A^{jkl}_{\cdots mn}}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix} s \\ mq \end{Bmatrix}A^{jkl}_{\cdots sn}-\begin{Bmatrix} s \\ nq \end{Bmatrix}A^{jkl}_{\cdots ms}$

$$+\begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^{skl}_{\cdots mn}+\begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix}A^{jsl}_{\cdots mn}+\begin{Bmatrix} l \\ qs \end{Bmatrix}A^{jks}_{\cdots mn}$$

54. 试证以下各项的协变导数为零：(a) g_{jk}；(b) g^{jk}；(c) δ^j_k。

证 (a) $g_{jk,q}=\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q}\quad\begin{Bmatrix} s \\ jq \end{Bmatrix}g_{sk}-\begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}g_{js}$

$$=\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q}-[jq,k]-[kq,j]=0\text{（见题 45(a)）}$$

(b) $g^{jk}_{\cdot q}=\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^q}+\begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}g^{sk}+\begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix}g^{js}=0$（见题 45(b)）

(c) $\delta^j_{k,q}=\frac{\partial \delta^j_k}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}\delta^j_s+\begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}\delta^s_k=0\quad\begin{Bmatrix} j \\ kq \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} j \\ qk \end{Bmatrix}=0$

55. 试求 $A^j_{\cdot k}B^{lm}_{\cdot\cdot n}$ 相对于 x^q 的协变导数。

解 $(A^{j}{}_{.k}B^{lm}{}_{..n})_{,q}=\dfrac{\partial(A^{j}{}_{.k}B^{lm}{}_{..n})}{\partial x^{q}}-\begin{Bmatrix}s\\kq\end{Bmatrix}A^{j}{}_{.s}B^{lm}{}_{..n}+\begin{Bmatrix}j\\qs\end{Bmatrix}A^{s}{}_{.k}B^{lm}{}_{..n}$

$$-\begin{Bmatrix}s\\nq\end{Bmatrix}A^{j}{}_{.k}B^{lm}{}_{..s}+\begin{Bmatrix}l\\qs\end{Bmatrix}A^{j}{}_{.k}B^{sm}{}_{..n}+\begin{Bmatrix}m\\qs\end{Bmatrix}A^{j}{}_{.k}B^{ls}{}_{..n}$$

$$=\left(\frac{\partial A^{j}{}_{.k}}{\partial x^{q}}-\begin{Bmatrix}s\\kq\end{Bmatrix}A^{j}{}_{.s}+\begin{Bmatrix}j\\qs\end{Bmatrix}A^{s}{}_{.k}\right)B^{lm}{}_{..n}$$

$$+\left(\frac{\partial B^{lm}}{\partial x^{q}}-\begin{Bmatrix}s\\nq\end{Bmatrix}B^{lm}{}_{..s}+\begin{Bmatrix}l\\qs\end{Bmatrix}B^{sm}{}_{..n}+\begin{Bmatrix}m\\qs\end{Bmatrix}B^{ls}{}_{..n}\right)A^{j}{}_{.k}$$

$$=A^{j}{}_{.k,q}B^{lm}{}_{..n}+A^{j}{}_{.k}B^{lm}{}_{..n,q}$$

56. 试证$(g_{jk}A^{km}{}_{..n})_{,q}=g_{jk}A^{km}{}_{..n,q}$。

证 $(g_{jk}A^{km}{}_{..n})_{,q}=g_{jk,q}A^{km}{}_{..n}+g_{jk}A^{km}{}_{..n,q}=g_{jk}A^{km}{}_{..n,q}$

因为题 54(a)已证 $g_{jk,q}=0$，在计算协变导数时，g_{jk}、g^{jk}、δ^{j}_{k} 可作为常数处理。

张量形式的梯度、散度和旋度

57. 试证 $\mathrm{div}A^{p}=\dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial}{\partial x^{k}}(\sqrt{g}A^{k})$。

证 A^{p} 的散度是 A^{p} 的协变导数的缩并，即 $A^{p}_{,q}$ 或 $A^{p}_{,p}$ 的缩并，应用 45 题(3)得

$$\mathrm{div}A^{p}=A^{p}_{,p}=\frac{\partial A^{k}}{\partial x^{k}}+\begin{Bmatrix}p\\pk\end{Bmatrix}A^{k}=\frac{\partial A^{k}}{\partial x^{k}}+\left(\frac{\partial}{\partial x^{k}}\ln\sqrt{g}\right)A^{k}$$

$$=\frac{\partial A^{k}}{\partial x^{k}}+\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^{k}}\right]A^{k}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{k}}(\sqrt{g}A^{k})$$

58. 试证$\nabla^{2}\Phi=\dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial}{\partial x^{k}}\left(\sqrt{g}g^{kr}\dfrac{\partial\phi}{\partial x^{r}}\right)$。

证 Φ 的梯度是 $\mathrm{grad}\Phi=\nabla\Phi=\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^{r}}$，这是一个一阶协变张量，如同计算 Φ 的协变导数一样计算(参看题 6(a))，记作 $\Phi_{,r}$。与 $\Phi_{,r}$ 相伴的一阶逆变张量是 $A^{k}=g^{kr}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^{r}}$。由例题 57，有

$$\nabla^{2}\Phi=\mathrm{div}\left(g^{kr}\frac{\partial\Phi}{\partial x^{r}}\right)=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{k}}\left(\sqrt{g}g^{kr}\frac{\partial\Phi}{\partial x^{r}}\right)$$

59. 试证 $A_{p,q}-A_{q,p}=\dfrac{\partial A_{p}}{\partial x^{q}}-\dfrac{\partial A^{q}}{\partial x^{p}}$。

证 $A_{p,q}-A_{q,p}=\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q}-\left\{\begin{matrix}s\\pq\end{matrix}\right\}A_s\right)-\left(\frac{\partial A_q}{\partial x^p}-\left\{\begin{matrix}s\\qp\end{matrix}\right\}A_s\right)$

$$=\frac{\partial A_p}{\partial x^q}-\frac{\partial A^q}{\partial x^p}$$

这个二阶张量确定了 A_p 的旋度。

60. 在以下坐标系中，试用矢量 A^p 的物理分量表示它的散度：(a)柱面坐标系；(b)球面坐标系。

解 (a) 在柱面坐标系中，$x^1=\rho,x^2=\varphi,x^3=z$，

$$g=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&\rho^2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=\rho^2,\quad \sqrt{g}=\rho \quad (\text{参看题 30(a)})$$

物理分量记作 A_ρ、A_φ、A_z，算得如下：

$$A_\rho=\sqrt{g_{11}}A^1=A^1$$

$$A_\varphi=\sqrt{g_{22}}A^2=\rho A^2$$

$$A_z=\sqrt{g_{33}}A^3=A^3$$

$$\mathrm{div}A^p=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k)$$

$$=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(A_\varphi)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho A_z)\right]$$

(b) 在球面坐标系中，$x^1=r,x^2=\theta,x^3=\varphi$，

$$g=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&r^2\sin^2\theta\end{vmatrix}=r^4\sin^2\theta,\quad \text{或}\quad \sqrt{g}=r^2\sin\theta \quad (\text{参看题 30(b)})$$

物理分量记作 A_r、A_θ、A_φ，有

$$A_r=\sqrt{g_{11}}A^1=A^1$$

$$A_\theta=\sqrt{g_{22}}A^2=rA^2$$

$$A_\varphi=\sqrt{g_{33}}A^3=r\sin\theta A^3$$

于是

$$\mathrm{div}A^p=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k)$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta A_r)+\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta A_\theta)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(rA_\varphi)\right]$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

61. 在以下坐标系中，写出$\nabla^2\Phi$的表达式：(a)柱面坐标系；(b)球面坐标系。

解 (a) 在柱面坐标系中，$g^{11}=1, g^{22}=1/\rho^2, g^{33}=1$(参看题 35(a))，由题 58 得

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}g^{kr}\frac{\partial\Phi}{\partial x^r}\right)\\ &= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]\\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\end{aligned}$$

(b) 在球面坐标系中，$g^{11}=1, g^{22}=1/r^2, g^{33}=1/r^2\sin^2\theta$(参看题 35(b))，有

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}g^{kr}\frac{\partial\Phi}{\partial x^r}\right)\\ &= \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\right]\\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\end{aligned}$$

内禀导数

62. 试计算下列张量的内禀导数，设 t 的函数是可微的：

(a) 不变量 Φ；(b) A^j；(c) $A^j_{\cdot k}$；(d) $A^{jk}_{\cdot\cdot lmn}$。

解 (a) $\dfrac{\delta\Phi}{\delta t}=\Phi_{,q}\dfrac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x^q}\dfrac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$，和通常一样地求导数。

(b)
$$\begin{aligned}\frac{\delta A^j}{\delta t} &= A^j_{,q}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial A^j}{\partial x^q}+\begin{Bmatrix} j\\ qs\end{Bmatrix}A^s\right)\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\partial A^j}{\partial x^q}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix} j\\ qs\end{Bmatrix}A^s\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}A^j}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix} j\\ qs\end{Bmatrix}A^s\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\frac{\delta A^j_{\cdot k}}{\delta t} &= A^j_{\cdot k,q}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial A^j_{\cdot k}}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix} s\\ kq\end{Bmatrix}A^j_{\cdot s}+\begin{Bmatrix} j\\ qs\end{Bmatrix}A^s_{\cdot k}\right)\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\mathrm{d}A^j_{\cdot k}}{\mathrm{d}t}-\begin{Bmatrix} s\\ kq\end{Bmatrix}A^j_{\cdot s}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix} j\\ qs\end{Bmatrix}A^s_{\cdot k}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}\frac{\delta A^{jk}_{\cdot\cdot lmn}}{\delta t} &= A^{jk}_{\cdot\cdot lmn,q}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}\\ &= \left(\frac{\partial A^{jk}_{\cdot\cdot lmn}}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix} s\\ lq\end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot smn}-\begin{Bmatrix} s\\ mq\end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot lsn}-\begin{Bmatrix} s\\ nq\end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot lms}\right.\\ &\quad\left.+\begin{Bmatrix} j\\ qs\end{Bmatrix}A^{sk}_{\cdot\cdot lmn}+\begin{Bmatrix} k\\ qs\end{Bmatrix}A^{js}_{\cdot\cdot lmn}\right)\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

$$=\frac{\mathrm{d}A^{jk}_{\cdot\cdot lmn}}{\mathrm{d}t}-\begin{Bmatrix}s\\lq\end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot smn}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}-\begin{Bmatrix}s\\mq\end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot lsn}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

$$-\begin{Bmatrix}s\\nq\end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot lms}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix}j\\qs\end{Bmatrix}A^{sk}_{\cdot\cdot lmn}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix}k\\qs\end{Bmatrix}A^{js}_{\cdot\cdot lmn}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

63. 试证 g_{jk}，g^{jk} 和 δ^j_k 的内禀导数等于零。

证 $\frac{\delta g_{jk}}{\delta t}=(g_{jk,q})\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=0$， $\frac{\delta g^{jk}}{\delta t}=(g^{jk}_{,q})\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=0$，

$\frac{\delta g^j_k}{\delta t}=\delta^j_{k,q}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=0$ （参看题 54）

相 对 张 量

64. 若 $A^p_{\cdot q}$ 和 $B^{rs}_{\cdot\cdot t}$ 分别是权 ω_1 和 ω_2 的相对张量，试证它们的内积和外积是权 $\omega_1+\omega_2$ 的相对张量。

证 根据假设，

$$\bar{A}^j_{\cdot k}=J^{\omega_1}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^k}A^p_{\cdot q},\quad \bar{B}^{lm}_{\cdot\cdot n}=J^{\omega_2}\frac{\partial\bar{x}^l}{\partial x^r}\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^n}B^{rs}_{\cdot\cdot t}$$

外积

$$\bar{A}^j_{\cdot k}\bar{B}^{lm}_{\cdot\cdot n}=J^{\omega_1+\omega_2}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial\bar{x}^l}{\partial x^r}\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^n}A^p_{\cdot q}B^{rs}_{\cdot\cdot t}$$

可见它是权 $\omega_1+\omega_2$ 的相对张量。任何内积是外积的缩并，故也是权 $\omega_1+\omega_2$ 的相对张量。

65. 试证$\sqrt{g}$是权为 1 的相对张量，即张量密度。

证 由行列式的元素 g_{pq} 给定的行列式 g 的变换符合

$$\bar{g}_{jk}=\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^k}g_{pq}$$

等式两边取其行列式，则

$$\bar{g}=\left|\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^j}\right|\left|\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^k}\right|g=J^2g$$

或$\sqrt{\bar{g}}=J\sqrt{g}$，这表明$\sqrt{g}$是权为 1 的相对张量。

66. 试证 $\mathrm{d}V=\sqrt{g}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^N$ 是不变量。

证 根据题 65，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\bar{V}&=\sqrt{\bar{g}}\mathrm{d}\bar{x}^1\mathrm{d}\bar{x}^2\cdots\mathrm{d}\bar{x}^N=\sqrt{g}J\,\mathrm{d}\bar{x}^1\mathrm{d}\bar{x}^2\cdots\mathrm{d}\bar{x}^N\\&=\sqrt{g}\left|\frac{\partial x}{\partial\bar{x}}\right|\mathrm{d}\bar{x}^1\mathrm{d}\bar{x}^2\cdots\mathrm{d}\bar{x}^N=\sqrt{g}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^N\\&=\mathrm{d}V\end{aligned}$$

由此，若 Φ 是不变量，则

$$\int \underset{\bar{V}}{\cdots} \int \bar{\Phi} \mathrm{d}\bar{V} = \int \underset{V}{\cdots} \int \Phi \mathrm{d}V$$

对于任何坐标系，N 维空间的体积均可依此积分。沿曲面积分也可以此类推。

综合应用

67. 将以下两项表示为张量形式：(a)质点的速度；(b)质点的加速度。

解 (a) 若质点沿曲线 $x^k = x^k(t)$ 运动，式中 t 为时间(参变量)，则 $v^k = \dfrac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}$ 是质点的速度，而且是一阶逆变张量(参看题 9)。

(b) $\dfrac{\mathrm{d}v^k}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}t^2}$ 一般不是张量，在一切坐标系中不能写出其物理量，我们定义加速度 a^k 作为速度的内禀导数，即 $a^k = \dfrac{\delta v^k}{\delta t}$ 是一阶逆变张量。

68. 将牛顿定律写成张量形式。

解 设质点的质量 M 是与时间 t 无关的不变量，则 $Ma^k = F^k$ 是一阶逆变张量，并称之为作用在质点上的力。牛顿定律可以写为

$$F^k = Ma^k = M \frac{\delta v^k}{\delta t}$$

69. 试证 $a^k = \dfrac{\delta v^k}{\delta t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}t^2} + \begin{Bmatrix} k \\ pq \end{Bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$。

证 因为 v^k 是逆变张量，由题 62(b)有

$$\frac{\delta v^k}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}v^k}{\mathrm{d}t} + \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix} v^s \frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}t^2} + \begin{Bmatrix} k \\ qp \end{Bmatrix} v^p \frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}t^2} + \begin{Bmatrix} k \\ qp \end{Bmatrix} \frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

70. 试求柱面坐标系中(a)质点的速度和(b)质点的加速度的物理分量。

解 (a) 根据题 67(a)，速度的逆变分量是

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

所以速度的物理分量是

$$\sqrt{g_{11}} \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}, \quad \sqrt{g_{22}} \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} = \rho \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \quad \sqrt{g_{33}} \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

上式中用了 $g_{11} = 1, g_{22} = \rho^2, g_{33} = 1$。

（b）由题 69 和题 49(b)，加速度的逆变分量是

$$a^1=\frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}t^2}+\begin{Bmatrix}1\\22\end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2}-\rho\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$$a^2=\frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}t^2}+\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix}2\\21\end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

$$a^3=\frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

加速度的物理分量是

$$\sqrt{g_{11}}a^1=\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2,\quad \sqrt{g_{22}}a^2=\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi},\quad \sqrt{g_{33}}a^3=\ddot{z}$$

式中的圆点表示分别对时间求导数。

71. 若质量 M 不变的质点以速度 v 运动，其动能 $T=\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}Mg_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q$，试证

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}^k}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^k}=Ma_k$$

式中，a_k 表示加速度的协变分量。

证 因为 $T=\frac{1}{2}Mg_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q$，所以有

$$\frac{\partial T}{\partial x^k}=\frac{1}{2}M\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q,\quad \frac{\partial T}{\partial\dot{x}^k}=Mg_{kq}\dot{x}^q$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}^k}\right)=M\left(g_{kq}\ddot{x}^q+\frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j}\dot{x}^j\dot{x}^q\right)$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}^k}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^k}=M\left(g_{kq}\ddot{x}^q+\frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j}\dot{x}^j\dot{x}^q-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q\right)$$

$$=M\left(g_{kq}\ddot{x}^q+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kq}}{\partial x^p}+\frac{\partial g_{kp}}{\partial x^q}-\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^p\dot{x}^q\right)$$

$$=M(g_{kq}\ddot{x}^q+[pq,k]\dot{x}^p\dot{x}^q)$$

$$=Mg_{kr}\left(\ddot{x}^r+\begin{Bmatrix}r\\pq\end{Bmatrix}\dot{x}^p\dot{x}^q\right)=Mg_{kr}a^r=Ma_k$$

以上证明过程中用了题 69 的结论。这个结果可以用在不同的坐标系中表示加速度。

72. 用题 70 的结果，求在柱面坐标系中加速度的物理分量。

解 因为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\rho^2+\rho^2\mathrm{d}\varphi^2+\mathrm{d}z^2,\quad v^2=\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2=\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2$$

所以

$$T=\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}M(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)$$

由于 $x^1=\rho, x^2=\varphi, x^3=z$，从题 70 可得

$$a_1=\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2,\quad a_2=\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^2\dot{\varphi})^2,\quad a_3=\ddot{z}$$

于是物理分量为

$$\frac{a_1}{\sqrt{g_{11}}},\frac{a_2}{\sqrt{g_{22}}}\ \frac{a_3}{\sqrt{g_{33}}}\quad 或\quad \ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2,\ \frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^2\dot{\varphi}),\ddot{z}$$

73. 若作用于质点的协变力为 $F_k=-\frac{\partial V}{\partial x^k}$，式中 $V(x^1,x^2,\cdots,x^N)$ 是势能，试证 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^k}=0$，其中 $L=T-V$。

证 从 $L=T-V$ 可知 $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}$，因为 V 与 $\dot{x}^k$ 无关，由题 71 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^k}=Ma_k=F_k=-\frac{\partial V}{\partial x^k}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right)-\frac{\partial}{\partial x^k}(T-V)=0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^k}=0$$

L 称为拉格朗日函数，包含 L 的方程叫做拉格朗日方程，这是力学中的重要方程。由题 50 可知，这一题的结论与质点沿 $\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t$ 的路径运动是有极值的说法是等价的。后者称为哈密顿原理。

74. 用张量形式表示散度定理。

解 设 A^k 确定一个一阶张量场，又设 v_k 表示以体积 V 为边界、封闭表面 S 上的任一点朝外的单位法线，于是散度定理为

$$\iiint_V A^k_{,k}\mathrm{d}V=\iint_S A^k v_k \mathrm{d}S$$

对 N 维空间，则要用 N 重积分代替三重积分，用 $N-1$ 重积分代替二重积分。不变量 $A^k_{,k}$ 是 A^k 的散度（参看题 57），不变量 $A^k v_k$ 是 A^k 和 v_k 的标积。

我们已经将散度定理表示为张量形式，因此对所有的坐标系都是正确的（参看题 66）。

75. 将马克斯威尔方程 (a) $\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0$，(b) $\mathrm{div}\boldsymbol{D}=4\pi\rho$，(c) $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{C}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$，(d) $\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{4\pi\boldsymbol{I}}{c}$ 表示为张量形式。

解 定义张量 B^k, D^k, E_k, H_k, I^k，并设 ρ 和 c 为不变量，于是方程可写成

(a) $B^k_{,k}=0$

(b) $D^k_{,k}=4\pi\rho$

(c) $-\in^{jkq}E_{k,q}=-\dfrac{1}{C}\dfrac{\partial B^j}{\partial t}$或$\in^{jkq}E_{k,q}=\dfrac{1}{C}\dfrac{\partial B^j}{\partial t}$

(d) $-\in^{jkq}H_{k,q}=\dfrac{4\pi I^j}{C}$或$\in^{jkq}H_{k,q}=-\dfrac{4\pi I^j}{C}$

这些方程是电磁理论的基础。

附录 B

正规正交化

对于 m 个矢量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$，当 $\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{p}_j=\delta_{ij}$ 成立时，称此 m 个矢量组成正规正交系。

给出一组线性无关的矢量，由它们作正规正交系的方法叫做正交归一化，又称施密特(Schmidt)正交化法。

引理　$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 组成正规正交系时，它们是线性无关的。

证　令 $c_1\boldsymbol{p}_1+c_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{p}_m=\boldsymbol{0}$，作 $\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 的内积，则

$$
\begin{aligned}
0=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{p}_1 &= c_1(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_1)+c_2(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{p}_1)+\cdots+c_m(\boldsymbol{p}_m\cdot\boldsymbol{p}_1)\\
&= c_1
\end{aligned}
$$

同理可证 $c_i=0$，所以 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 是线性无关的。

给定一组线性无关的矢量，研究如何用它们作正规正交系。

设 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关，且 $\boldsymbol{x}_i\neq\boldsymbol{0}$。

首先，设 $\dfrac{\boldsymbol{x}_1}{|\boldsymbol{x}_1|}=\boldsymbol{p}_1$ 时，则 $\boldsymbol{p}_1$ 的大小是 1。

其次，从 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 的线性组合中选出与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交的矢量。就几何意义来说，在 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 决定的平面中能找到与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交的矢量。

设

$$
\boldsymbol{g}_2=c_1\boldsymbol{p}_1+c_2\boldsymbol{x}_2 \quad \text{(如图 B-1 所示)}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{p}_1 &= (c_1\boldsymbol{p}_1+c_2\boldsymbol{x}_2)\cdot\boldsymbol{p}_1\\
&= c_1+c_2(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{p}_1)=0
\end{aligned}
$$

所以

$$c_1 = -c_2 \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{p}_1$$

从而得

$$\boldsymbol{g}_2 = c_2[\boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1]$$

由于 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 线性无关，所以

$$\boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1 \neq \boldsymbol{0}$$

因此，取 $c_2=1$，令

$$\boldsymbol{p}_2 = \frac{\boldsymbol{g}_2}{|\boldsymbol{g}_2|} = \frac{\boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1}{|\boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1|}$$

即可。

再次，考虑 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ 与 $\boldsymbol{x}_3$ 的线性组合

$$\boldsymbol{g}_3 = d_1\boldsymbol{p}_1 + d_2\boldsymbol{p}_2 + d_3\boldsymbol{p}_3$$

因为

$$\boldsymbol{g}_3 \cdot \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{g}_3 \cdot \boldsymbol{p}_2 = 0 \text{（如图 B-2 所示）}$$

所以

$$d_1 + d_3\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{p}_1 = 0, \quad d_2 + d_3\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{p}_2 = 0$$

从而有

$$\boldsymbol{g}_3 = d_3[x_3 - (\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1 - (\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_2]$$

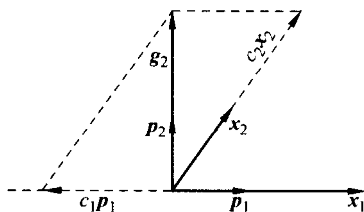


图　B-1

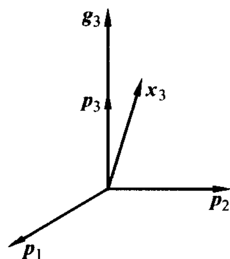


图　B-2

因为 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{x}_3$ 不能表示为 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 的线性组合，因此

$$\boldsymbol{x}_3 - (\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1 - (\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_2 \neq \boldsymbol{0}$$

故取 $d_3=1$，令 $\boldsymbol{p}_3 = \frac{\boldsymbol{g}_3}{|\boldsymbol{g}_3|}$ 即可。以下依此推演，令

$$\boldsymbol{p}_j = \frac{\boldsymbol{x}_i - \sum_{i=1}^{j-1}(\boldsymbol{x}_j \cdot \boldsymbol{p}_i)\boldsymbol{p}_i}{\left|\boldsymbol{x}_j - \sum_{i=1}^{j-1}(\boldsymbol{x}_j \cdot \boldsymbol{p}_i)\boldsymbol{p}_i\right|}$$

$$(2 \leqslant j \leqslant m)$$

于是 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 组成正规正交系。上述组成正规正交系的方法称为施密特正交化法。

由上述做法可知，$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 分别是 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 的线性组合。反之，由于

$$\boldsymbol{x}_1=\frac{|\boldsymbol{x}_1|}{\boldsymbol{p}_1},\quad \boldsymbol{x}_2=(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1+|\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1|\ \boldsymbol{p}_2,\cdots$$

于是，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 又分别是 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 的线性组合。

例 B.1 用矢量

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

作正规正交系时，则有

$$|\boldsymbol{x}_1|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2},\quad \boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1|=\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\boldsymbol{p}_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_3-(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1-(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{3}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{x}_3-(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1-(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_2|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\boldsymbol{p}_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

附录C 曲线坐标系

C.1 正交曲线坐标系

设空间任一点 P 的直角坐标 x_1、x_2、x_3 可表示为 u_1、u_2、u_3 的函数，即

$$x = x(u_1, u_2, u_3), \quad y = y(u_1, u_2, u_3), \quad z = z(u_1, u_2, u_3) \tag{C.1}$$

并假定由式(3.1)能解出 u_1, u_2, u_3，即

$$u_1 = u_1(x, y, z), \quad u_2 = u_2(x, y, z), \quad u_3 = u_3(x, y, z) \tag{C.2}$$

假设式(C.1)、式(C.2)都是连续可导的单值函数，而且是惟一的。对于特殊坐标系中的某些点不作上述假设要求。

给定点 P 的直角坐标 x、y、z，由式(C.2)能解出惟一的一组相应的坐标 u_1、u_2、u_3，我们称 u_1, u_2, u_3 为点 P 的曲线坐标。

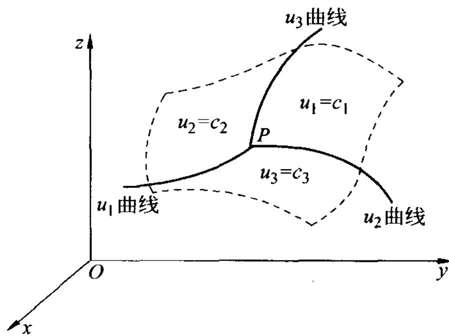


图 C-1

曲面 $u_1=c_1, u_2=c_2, u_3=c_3$（式中 c_1, c_2, c_3 为常量）称为坐标曲面。每对坐标曲面的交线称为坐标曲线或坐标线(图 C-1)。如果坐标面的交角是直角，则称此曲线坐标系是正交的。曲线坐标系中的坐标曲线 u_1, u_2, u_3 与直角坐标系中的坐标轴 x, y, z 相类似。

C.2 单位矢量、弧元与体积元

1. 单位矢量

设点 P 的位置矢量为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则式(C.1)可写成

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_1,u_2,u_3)$$

曲线 u_1 在点 P 的切矢量为 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}$(此时 u_2,u_3 为常量)，于是沿此方向的单位切矢量

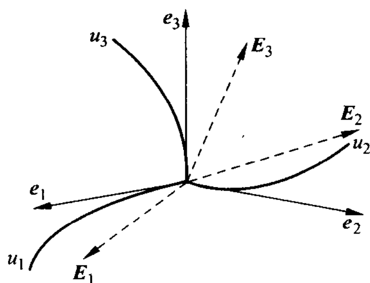


图 C-2

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\right|}$$

即

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}=h_1\boldsymbol{e}_1$$

式中

$$h_1=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\right|$$

同样地，如果 $\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 分别是曲线 u_2,u_3 在 P 点的单位切矢量，则 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}=h_2\boldsymbol{e}_2$，$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}=h_3\boldsymbol{e}_3$，式中 $h_2=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\right|$，$h_3=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}\right|$，$h_1,h_2,h_3$ 称为标量因子。单位矢量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 分别沿曲线 u_1,u_2,u_3 增加的方向，如图 C-2 所示。

因为 ∇u_1 是曲面 $u_1=c_1$ 在 P 点法线方向的矢量，这个方向的单位矢量 $\boldsymbol{E}_1=\frac{\nabla u_1}{|\nabla u_1|}$。同样地，曲面 $u_2=c_2$，$u_3=c_3$ 在 P 点法线方向的单位矢量分别为 $\boldsymbol{E}_2=\frac{\nabla u_2}{|\nabla u_2|}$，$\boldsymbol{E}_3=\frac{\nabla u_3}{|\nabla u_3|}$。

2. 弧元与体积元

由 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_1,u_2,u_3)$，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3=h_1\mathrm{d}u_1\boldsymbol{e}_1+h_2\mathrm{d}u_2\boldsymbol{e}_2+h_3\mathrm{d}u_3\boldsymbol{e}_3$$

于是，弧元的微分 $\mathrm{d}s$ 由 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 确定。对于正交系，由于 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1=0$，所以

$$\mathrm{d}s^2=h_1{}^2\mathrm{d}u_1{}^2+h_2{}^2\mathrm{d}u_2{}^2+h_3{}^2\mathrm{d}u_3{}^2 \tag{C.3}$$

对于一般的(不一定是正交的)曲线坐标系,弧元的平方为

$$ds^2 = \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{pq}\,du_p\,du_q \tag{C.4}$$

证明如下。

因为

$$dr = \frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_3}{\partial u_3}du_3 = \boldsymbol{\beta}_1 du_1 + \boldsymbol{\beta}_2 du_2 + \boldsymbol{\beta}_3 du_3$$

于是

$$\begin{aligned} ds^2 = d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{\beta}_1\cdot\boldsymbol{\beta}_1 du_1{}^2 + \boldsymbol{\beta}_1\cdot\boldsymbol{\beta}_2 du_1 du_2 + \boldsymbol{\beta}_1\cdot\boldsymbol{\beta}_3 du_1 du_3 + \boldsymbol{\beta}_2\cdot\boldsymbol{\beta}_1 du_2 du_1 \\ &\quad + \boldsymbol{\beta}_2\cdot\boldsymbol{\beta}_2 du_2{}^2 + \boldsymbol{\beta}_2\cdot\boldsymbol{\beta}_3 du_2 du_3 + \boldsymbol{\beta}_3\cdot\boldsymbol{\beta}_1 du_3 du_1 + \boldsymbol{\beta}_3\cdot\boldsymbol{\beta}_2 du_3 du_2 + \boldsymbol{\beta}_3\cdot\boldsymbol{\beta}_3 du_3{}^2 \\ &= \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{pq}\,du_p\,du_q \end{aligned}$$

式中

$$g_{pq} = \boldsymbol{e}_p\cdot\boldsymbol{e}_q$$

系数矩阵 g_{pq} 是对称矩阵。

如果坐标系是正交的,则 $p\neq q$ 时 $g_{pq}=0$,于是便得式(C.3)。

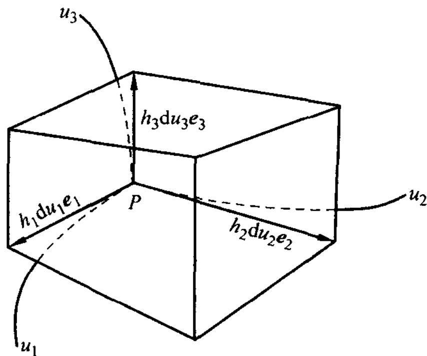


图 C-3

由图 C-3 可以看出,沿着曲线 u_1(此时令 u_2, u_3 为常量),即 $d\boldsymbol{r}=h_1 du_1 \boldsymbol{e}_1$,则沿着 u_1 在 P 点的弧长的微分 ds_1 是 $h_1 du_1$。同样地,沿着 u_2, u_3 在 P 点的弧长的微分分别是 $ds_2=h_2 du_2$, $ds_3=h_3 du_3$。

由图 C-3 还可得正交曲线坐标系中的体积元为

$$\begin{aligned} dV &= \left|(h_1 du_1 \boldsymbol{e}_1)\cdot(h_2 du_2 \boldsymbol{e}_2)\times(h_3 du_3 \boldsymbol{e}_3)\right| \\ &= h_1 h_2 h_3\, du_1\, du_2\, du_3 \end{aligned} \tag{C.5}$$

这是因为正交的单位矢量 $|\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3|=1$。

C.3 梯度、散度与旋度

梯度、散度与旋度都可表示为曲线坐标的函数。设 Φ 是一标量函数，$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$ 是正交曲线坐标 u_1,u_2,u_3 的矢函数，则下列结论是有效的。

$$\nabla\Phi=\mathrm{grad}\Phi=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\boldsymbol{e}_3 \tag{C.6}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3a_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1a_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2a_3)\right\} \tag{C.7}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\mathrm{curl}\boldsymbol{a}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1a_1 & h_2a_2 & h_3a_3\end{vmatrix} \tag{C.8}$$

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\right)\right] \tag{C.9}$$

如果 $h_1=h_2=h_3=1$，且用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 代替 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$，则上述结论就是第 1 章里所得的有关梯度、散度、旋度的公式，上述公式中的坐标 u_1,u_2,u_3，就是第 1 章里的坐标 x,y,z。

上述公式已在 5.5 节证明过。

C.4 常用的几种正交曲线坐标系

(1) 柱面坐标系(ρ,φ,z)(图 C-4)

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z$$

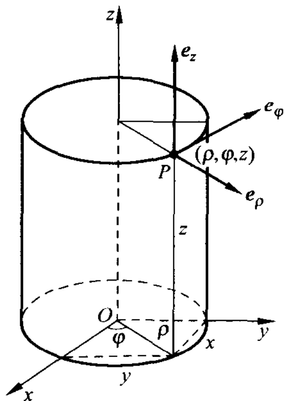


图 C-4

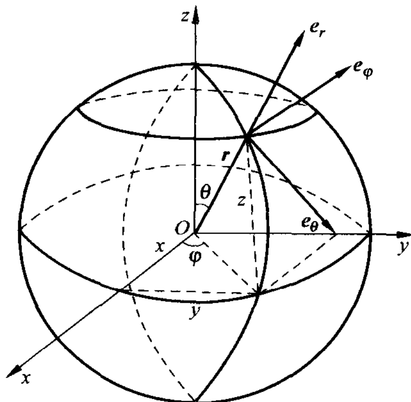


图 C-5

式中，$\rho\geqslant0, 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi, -\infty<z<\infty$。

$$h_\rho = 1,\quad h_\varphi = \rho,\quad h_z = 1$$

（2）球面坐标系(r,θ,φ)（图C-5）

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

式中，$r\geqslant0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi$。

$$h_r = 1,\quad h_\theta = r,\quad h_\varphi = r\sin\theta$$

（3）椭球坐标系(λ,μ,ν)

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1,\quad \lambda<c^2<b^2<a^2$$

$$\frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+\frac{z^2}{c^2-\mu}=1,\quad c^2<\mu<b^2<a^2$$

$$\frac{x^2}{a^2-\nu}+\frac{y^2}{b^2-\nu}+\frac{z^2}{c^2-\nu}=1,\quad c^2<b^2<\nu<a^2$$

$$h_\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)}}$$

$$h_\mu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)}}$$

$$h_\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)}}$$

（4）椭圆柱坐标系(u,v,z)（图C-6）

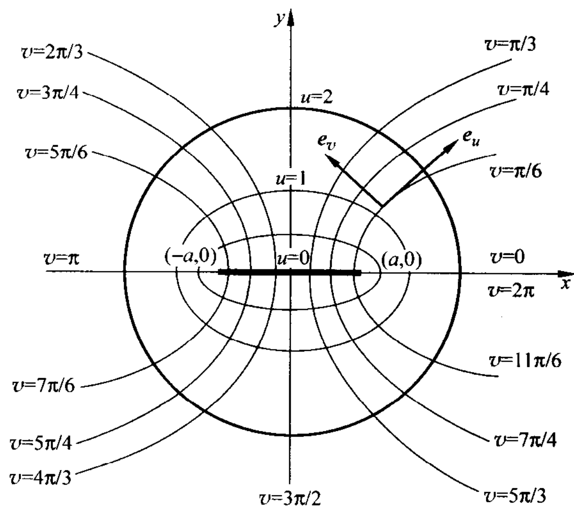


图 C-6

$$x = a\cosh u\cos v$$
$$y = a\sinh u\sin v$$
$$z = z$$

式中，$u \geqslant 0, 0 \leqslant v \leqslant 2\pi, -\infty < z < \infty$。

$$h_u = h_v = \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}$$
$$h_z = 1$$

坐标面在 xy 平面内的迹线如图 C-6 所示，这些迹线是共焦椭圆与双曲线。

例 C.1 试证柱面坐标系是正交的。

证 柱面坐标系中任一点的位矢为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = \rho\cos\varphi\boldsymbol{i} + \rho\sin\varphi\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

ρ，φ 与 z 曲线的切矢量分别为 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}$。式中

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho} = \cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \rho\sin\varphi\boldsymbol{j}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \boldsymbol{k}$$

沿这些方向的单位矢量为

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_\rho = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}\right|} = \frac{\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j}}{\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}} = \cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_\varphi = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\right|} = \frac{-\rho\sin\varphi\boldsymbol{i} + \rho\cos\varphi\boldsymbol{j}}{\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi}} = -\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_z = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\right|} = \boldsymbol{k}$$

于是

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = (\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j}) \cdot (-\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}) = 0$$
$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = (\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j}) \cdot \boldsymbol{k} = 0$$
$$\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = (-\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}) \cdot \boldsymbol{k} = 0$$

可见坐标系是正交的。

习　　题

C.1 试用柱面坐标系表示矢量 $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$。

C.2 试用球面坐标系表示矢量 $\boldsymbol{a} = 2y\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + 3x\boldsymbol{k}$。

C.3 试证$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\rho=\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\varphi=-\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\rho$，式中字母上面的圆点表示对时间的导数。

C.4 试证 $\dot{\boldsymbol{e}}_r=\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\sin\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$，$\dot{\boldsymbol{e}}_\theta=-\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r+\cos\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$，$\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi=-\sin\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_r-\cos\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\theta$。

C.5 试求柱面坐标系中的弧元平方，并确定相应的标量因子。

C.6 试求椭圆柱坐标系中的弧元平方，并确定相应的标量因子。

C.7 试用球面坐标系解题 C.5。

C.8 试证曲线坐标系正交的必要与充分条件是：当 $p\neq q$ 时，$g'_{pq}=0$。

C.9 试求柱面坐标系与球面坐标系中的体积元。

C.10 试求椭圆柱坐标系中的体积元。

C.11 设 u_1,u_2,u_3 是正交曲线坐标，试证 x,y,z 相对于 u_1,u_2,u_3 的雅可比为 $h_1h_2h_3$。

C.12 试求柱面坐标系与球面坐标系中的雅可比。

C.13 设 u_1,u_2,u_3 为广义坐标，试证$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_1},\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_2},\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_3}$与$\nabla u_1,\nabla u_2,\nabla u_3$ 为互逆系。

C.14 试求柱面坐标系与球面坐标系中的$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_1},\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_2},\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_3}$及$\nabla u_1,\nabla u_2,\nabla u_3$。并证明这些系中，$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{E}_2$，$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{E}_3$。

C.15 试证$\left\{\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_2}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_3}\right\}\{\nabla u_1\cdot\nabla u_2\times\nabla u_3\}=1$。

C.16 设有 $x^2-y^2=2u_1\cos u_2$，$xy=u_1\sin u_2$，$z=u_3$。(1)证明该系为正交系；(2)求雅可比。

C.17 推导正交曲线坐标系中$\nabla\Phi$的表示式。

C.18 推导球面坐标系中$\nabla\Psi$与$\nabla\cdot\boldsymbol{a}$的表示式。

C.19 设 u_1,u_2,u_3 为正交坐标系，(1)证明$|\nabla u_p|=h_p^{-1}$，$p=1,2,3$；(2)证明 $\boldsymbol{e}_p=\boldsymbol{E}_p$。

C.20 给定下列坐标变换 $u_1=xy$，$2u_2=x^2+y^2$，$u_3=z$。(1)证明坐标系是正交的；(2)求雅可比；(3)求 $\mathrm{d}s^2$。

C.21 设 u_1,u_2,u_3 是正交坐标系，试证 $\boldsymbol{e}_1=h_2h_3\nabla u_2\times\nabla u_3$，并求 $\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 与此相应的表示式。

C.22 试求半径为 a 的球面上的弧元。

C.23 试证正交坐标系中

$$\nabla\times(a_1\boldsymbol{e}_1)=\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(a_1h_1)-\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(a_1h_1)$$

C.24 试证正交坐标系中

$$\nabla\cdot(a_1\boldsymbol{e}_1)=\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(a_1h_2h_3)$$

C. 25 推导正交坐标系中 curl$\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}$ 的表示式。

C. 26 推导正交坐标系中 div$\boldsymbol{a}=\nabla\cdot\boldsymbol{a}$ 的表示式。

C. 27 推导正交坐标系中$\nabla^2\Psi$ 的表示式。

C. 28 试写出椭圆柱坐标系中的方程$\frac{\partial^e\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\Phi$。

C. 29 推导柱面坐标系中$\nabla\times\boldsymbol{a}$ 与$\nabla^2\Phi$ 的表示式。

C. 30 推导柱面坐标系中$\nabla\Phi$ 与$\nabla\cdot\boldsymbol{a}$ 的表示式。

C. 31 推导球面坐标系中$\nabla^2\Psi$ 的表示式。

C. 32 推导球面坐标系中$\nabla\times\boldsymbol{a}$ 的表示式。

附录 D
部分习题解答及提示

第 1 章　矢 量 分 析

1.1　试证矢量加法符合结合律，即 $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$。

证　如图所示，

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

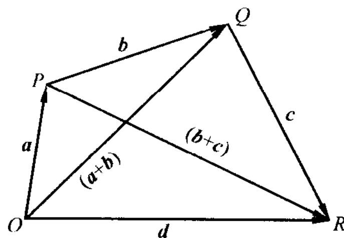
$$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$$

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}=\boldsymbol{d}\quad 即\quad \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{d}$$

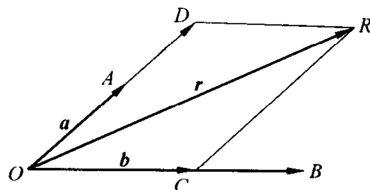
$$\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OR}=\boldsymbol{d}\quad 即\quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$$

所以，

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$$



题 1.1 图



题 1.2 图

1.2　已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是共面但不共线的两个矢量，在 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所决定的平面内，写出任一矢量 $\boldsymbol{r}$ 的表达式。

解　共面不共线的两矢量，即不平行于同一矢量的两矢量必有一交点。设在此平面内的任一矢量 $\boldsymbol{r}$ 的始端与其交点 O 相交（见题 1.2 图），从 $\boldsymbol{r}$ 的末端 R 分别作 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的平行线与 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$（或其延长线）分别交于 C，D 两点，于是构成平行四边形 $OCRD$，OR 是平行四边形的对角线。由图可知

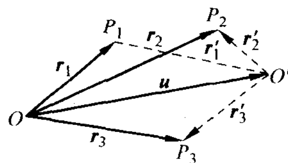
$$\overrightarrow{OD}=x(\overrightarrow{OA})=x\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{OC}=y(\overrightarrow{OB})=y\boldsymbol{b}$$

式中，x，y 是标量。根据平行四边形加法法则，有

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}\quad 或\quad \boldsymbol{r}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$$

这就是所求的表达式。矢量 $x\boldsymbol{a}$，$y\boldsymbol{b}$ 分别称为矢量 $\boldsymbol{r}$ 在 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向的分矢量。标量 x，y 的正负号依有关矢量的方向而定。很明显，对于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{r}$ 而言，x，y 是惟一的。矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 称为基矢量。

1.3　设 P_1,P_2,P_3 是相对于原点 O 的三个固定点，它们的位矢分别为 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$。试证明：当且仅当 $a_1+a_2+a_3=0$，矢量方程 $a_1\boldsymbol{r}_1+a_2\boldsymbol{r}_2+a_3\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0}$ 对原点 O 成立时，这类矢量方程对于任何其他的原点 O' 也成立。



题 1.3 图

证　设 P_1,P_2,P_3 点相对于 O' 点的位矢分别为 $\boldsymbol{r}'_1$，$\boldsymbol{r}'_2$，$\boldsymbol{r}'_3$，并设 O' 点相对于 O 点的位矢为 $\boldsymbol{u}$，现在找出使方程 $a_1\boldsymbol{r}'_1+a_2\boldsymbol{r}'_2+a_3\boldsymbol{r}'_3=\boldsymbol{0}$ 在新参考系中成立的条件。

如图所示，

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}'_1,\quad \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}'_2,\quad \boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}'_3$$

而且

$$a_1\boldsymbol{r}_1+a_2\boldsymbol{r}_2+a_3\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0}$$

于是

$$\begin{aligned}a_1\boldsymbol{r}_1+a_2\boldsymbol{r}_2+a_3\boldsymbol{r}_3&=a_1(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}'_1)+a_2(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}'_2)+a_3(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}'_3)\\&=(a_1+a_2+a_3)\boldsymbol{u}+a_1\boldsymbol{r}'_1+a_2\boldsymbol{r}'_2+a_3\boldsymbol{r}'_3=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

欲使

$$a_1\boldsymbol{r}'_1+a_2\boldsymbol{r}'_2+a_3\boldsymbol{r}'_3=\boldsymbol{0}$$

只有当且仅当

$$(a_1+a_2+a_3)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0},\quad 即\quad a_1+a_2+a_3=0$$

这个结论可适用于一般情况。

1.4　已知 P、Q 两点的位矢分别为 $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_2=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，试用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 表示 $\overrightarrow{PQ}$，并求其大小。

答　$2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，7。

1.6 设 $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_3=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_4=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，若 $\boldsymbol{r}_4=a\boldsymbol{r}_1+b\boldsymbol{r}_2+c\boldsymbol{r}_3$，求 a,b,c。

解 根据题意，所求的是

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}&=a(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})+b(\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})+c(-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})\\&=(2a+b-2c)\boldsymbol{i}+(-a+3b+c)\boldsymbol{j}+(a-2b-3c)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

因 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 不共线，所以

$$2a+b-2c=3,\quad -a+3b+c=2,\quad a-2b-3c=5$$

解得

$$a=-2,\quad b=1,\quad c=-3$$

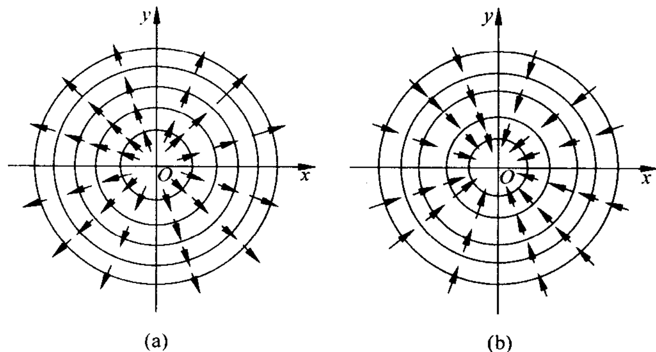
即

$$\boldsymbol{r}_4=-2\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2-3\boldsymbol{r}_3$$

矢量 $\boldsymbol{r}_4$ 称为与矢量 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$ 线性相关，或说 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$ 与 $\boldsymbol{r}_4$ 构成线性相关矢量组。

一般情况下，若有一组不全为零的标量 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$，使得 $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}+\cdots=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 称为线性相关，否则称为线性无关。

1.7 作图描述下列矢量场：(1) $\boldsymbol{V}(x,y)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$；(2) $\boldsymbol{V}(x,y)=-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}$；(3) $\boldsymbol{V}(x,y,z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$。



题 1.7 图

解 (1) 在 Oxy 平面，对应每一点 (x,y) 惟一地有一矢量 $x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，该矢量的模为 $\sqrt{(x)^2+(y)^2}$，方向是由原点 O 向外发散。所有的 $x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$ 矢量均对应着圆 $(x)^2+(y)^2=a^2(a>0)$ 上的一点（如题 1.7 图(a)）。亦即圆上各点法线（向外）方向就是矢量场的方向。

(2) 对于矢量场 $\boldsymbol{V}(x,y)=-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}$，与(1)的情况一样，但各点的矢量均与(2)中的反向，如图题 1.7 图(b)所示。

情况(1)称为有源场，O 点是场源；情况(2)是汇聚场，O 点是汇聚点。

以上两种矢量场都与 z 无关，所以是二维场。

(3) 因为场中的每个矢量的模是 $\sqrt{(x)^2+(y)^2+(z)^2}$，所有的点都在球面 $(x)^2+(y)^2+(z)^2=a^2$ 上，其中 $a>0$。场中各矢量是由球心 O 发出，并沿球面各点法线方向发散，故称为三维有源场。

1.9　试证 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$。

证　如图所示，设 $\hat{a}$ 是矢量 $\boldsymbol{a}$ 沿其本身方向的单位矢量，则 $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影等于 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影加 $\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影，即

$$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\hat{a}=\boldsymbol{b}\cdot\hat{a}+\boldsymbol{c}\cdot\hat{a}$$

用 a 乘等式两边，得

$$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot a\hat{a}=\boldsymbol{b}\cdot a\hat{a}+\boldsymbol{c}\cdot a\hat{a}$$

题 1.9 图

即

$$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$$

因矢量标量积遵守交换律，所以

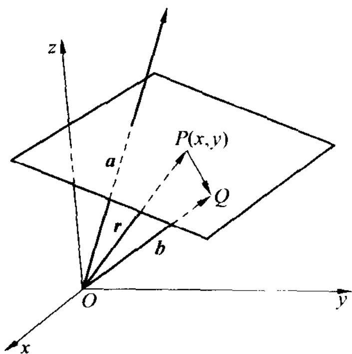
$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$$

至此，矢量的标量积遵守分配律得证。

1.11　设 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，试求垂直于 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的单位矢量。

答　$\pm(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})/3$。

1.12　试求与矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ 垂直，并通过矢量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 末端的平面方程。



题 1.12 图

解　设 P 点是所求平面上的一点，$\boldsymbol{r}$ 是 $P(x,y,z)$ 点的位矢，Q 点是矢量 $\boldsymbol{b}$ 的末端，Q 点显然应在所求的平面内，因为所求的平面要与矢量 $\boldsymbol{a}$ 垂直，所以在该平面内的矢量 $\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{r}$ 应与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，即

$$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{a}=0$$

或

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

这就是所求平面的矢量形式的方程。该方程用直角坐标形式表示是

$$(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\cdot(2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})=(\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\cdot(2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})$$

即

$$2x+3y+6z=1\times2+5\times3+3\times6=35$$

1.13 设已知点(x_1,y_1,z_1)的位矢为$\boldsymbol{a}$，任意点(x,y,z)的位矢为$\boldsymbol{r}$，描述下列情况下$\boldsymbol{r}$的轨迹：(1) $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|=3$；(2) $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=0$；(3) $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{r}=0$。

答 (1) 中心在(x_1,y_1,z_1)，半径为3的球；(2) 垂直于矢量$\boldsymbol{a}$并通过其矢末端的平面；(3) 中心在$\left(\frac{x_1}{2},\frac{y_1}{2},\frac{z_1}{2}\right)$、半径为$\frac{1}{2}\sqrt{(x_1)^2+(y_1)^2+(z_1)^2}$或直径为$a$的球。

1.14 求题1.12中坐标原点到所作平面的距离。

解 从原点到平面的距离是$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$上的投影。

矢量$\boldsymbol{a}$沿其自身的单位矢量是

$$\hat{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{a}}{a}=\frac{2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2)^2+(3)^2+(6)^2}}=\frac{2}{7}\boldsymbol{i}+\frac{3}{7}\boldsymbol{j}+\frac{6}{7}\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$上的投影

$$\boldsymbol{b}\cdot\hat{\boldsymbol{a}}=(\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{2}{7}\boldsymbol{i}+\frac{3}{7}\boldsymbol{j}+\frac{6}{7}\boldsymbol{k}\right)$$

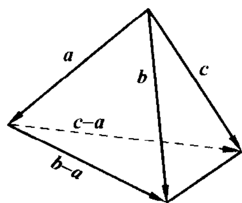
$$=1\times\frac{2}{7}+5\times\frac{3}{7}+3\times\frac{6}{7}=5$$

1.15 设$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，试求：(1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$；(2) $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；(3) $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$。

答 (1) $\sqrt{195}$；(2) $-25\boldsymbol{i}+35\boldsymbol{j}-55\boldsymbol{k}$；(3) $2\sqrt{195}$。

1.16 如图所示，设$\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2,\boldsymbol{V}_3,\boldsymbol{V}_4$四矢量的模分别等于四面体四个表面$F_1,F_2,F_3,F_4$的面积，矢量的方向是这些表面向外的法线方向，试证$\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3+\boldsymbol{V}_4=\boldsymbol{0}$。

证 以$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$为边的三角形面积是$\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$。



题1.16图

四面体每个面的矢量是

$$\boldsymbol{V}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{V}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{V}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{V}_4=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

于是

$$\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3+\boldsymbol{V}_4=\frac{1}{2}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})]$$

$$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})$$

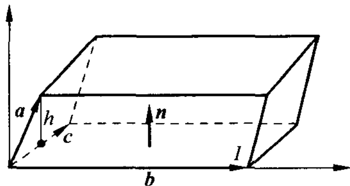
$$=\boldsymbol{0}$$

这个结论可推广到封闭的任意多面体。

1.17 设$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，试求：(1) $|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}|$；(2) $|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$；(3) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$；(4) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$；(5) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$；(6) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$。

答　(1) $5\sqrt{26}$；(2) $3\sqrt{10}$；(3) -20；(4) -20；(5) $-40\boldsymbol{i}-20\boldsymbol{j}+20\boldsymbol{k}$；(6) $35\boldsymbol{i}-35\boldsymbol{j}+35\boldsymbol{k}$。

1.18　试证 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行六面体体积的绝对值。



题 1.18 图

证　如图所示，设 $\boldsymbol{n}$ 是 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 构成的平行四边形 I 的单位法向矢量，h 是矢量 $\boldsymbol{a}$ 末端到平行四边形 I 的高。因为平行六面体体积等于平行四边形(底)的面积乘高，所以

$$V=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})(|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|)=\boldsymbol{a}\cdot[|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|\boldsymbol{n}]=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 构成左手系，则 $a\cdot n<0$，命题得证。

1.19　试证 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$。

证　因为

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

根据行列式的行与行或列与列对调一次，就改变行列式一次正负号的性质，有

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$$

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}c_1 & c_2 & c_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

1.20　试证矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面的充分与必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=0$。

证　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=0$ 可以写成 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$。

如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，则以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行六面体的体积为零，由题 1.18 知，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$。

如果 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$，则由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 构成的平行六面体体积为零，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 必定共面。

1.21　化简 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$。

答　$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$。

1.23　试证球面三角形的正弦定理。

证　如图所示，设 PQR 是一球面上的三角形，三角形的三边是三段球面弧长，题目要求证明的是

$$\frac{\sin P}{\sin p}=\frac{\sin Q}{\sin q}=\frac{\sin R}{\sin r}$$

设球的半径是单位长，从球心 O 到 P、Q、R 各点的矢径分别为单位矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$。根据例1.12有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \tag{a}$$

垂直于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 的单位矢量是 $\boldsymbol{a}$，于是式(a)成为

$$\sin r\sin q\sin P\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \tag{b}$$

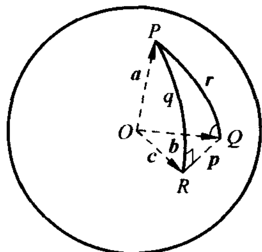
或

$$\sin r\sin q\sin P=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} \tag{c}$$

将 $p,q,r;P,Q,R$ 和 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 轮换，得

$$\sin p\sin r\sin Q=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a} \tag{d}$$

$$\sin q\sin p\sin R=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{e}$$



题1.23图

由例1.19知，式(c)、式(d)和式(e)的右边相等，故有

$$\sin r\sin q\sin P=\sin p\sin r\sin Q=\sin q\sin p\sin R$$

于是

$$\frac{\sin P}{\sin p}=\frac{\sin Q}{\sin q}=\frac{\sin R}{\sin r}$$

1.24 试证$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2$。

证 由式(1.36)，有

$$\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{c})$$

设 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})&=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c})\\&=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^2\end{aligned}$$

1.25 求矢量组 $2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的对偶矢量组。

答 $\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{1}{3}\boldsymbol{k},-\frac{8}{3}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\frac{7}{3}\boldsymbol{k},-\frac{7}{3}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\frac{5}{3}\boldsymbol{k}$。

1.26 已知 $\boldsymbol{e}_1'=\frac{\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3},\boldsymbol{e}_2'=\frac{\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3},\boldsymbol{e}_3'=\frac{\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2}{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}$，若 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3\neq0$，试证：(1) 若 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=V$，则 $\boldsymbol{e}_1'\cdot\boldsymbol{e}_2'\times\boldsymbol{e}_3'=1/V$；(2) 若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 不共面，则 $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'$ 也不共面。

证 $\boldsymbol{e}_1'=\frac{\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}{V},\quad \boldsymbol{e}_2'=\frac{\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1}{V},\quad \boldsymbol{e}_3'=\frac{\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2}{V}$

则

$$\boldsymbol{e}_1'\cdot\boldsymbol{e}_2'\times\boldsymbol{e}_3'=\frac{(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)\cdot(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1)\times(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)}{V^3}$$

$$=\frac{(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)\times(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1)}{V^3}$$

利用题 1.24 可得

$$\boldsymbol{e}_1'\cdot\boldsymbol{e}_2'\times\boldsymbol{e}_3'=\frac{(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)^2}{V^3}=\frac{V^2}{V^3}=\frac{1}{V}$$

(2) 由题 1.20 知，如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 不共面，则 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3\neq 0$。从题 1.26 证明的结果可知 $\boldsymbol{e}_1'\cdot\boldsymbol{e}_2'\times\boldsymbol{e}_3'\neq 0$，所以 $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2'$ 和 $\boldsymbol{e}_3'$ 不共面。

1.28　已知 $\boldsymbol{a}=\sin t\,\boldsymbol{i}+\cos t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$，试求：(1) $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$；(2) $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}$；(3) $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right|$；(4) $\left|\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right|$。

解　(1) $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin t)\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos t)\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t)\boldsymbol{k}=\cos t\boldsymbol{i}-\sin t\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

(2) $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right)=-\sin t\boldsymbol{i}-\cos t\boldsymbol{j}$

(3) $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right|=\sqrt{(\cos t)^2+(-\sin t)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$

(4) $\left|\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right|=\sqrt{(-\sin t)^2+(-\cos t)^2}=1$

1.29　曲线 C 的参数方程为 $x=x(s),y=y(s),z=z(s)$，式中 s 是从曲线 C 上一定点沿着 C 量得的弧长。设 $\boldsymbol{r}$ 是曲线 C 上任一点 P 的位矢，试证明 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s$ 是曲线 C 在该点的切线单位矢量。

证　矢量 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}$ 与曲线 $x=x(s),y=y(s),z=z(s)$ 相切。

再证此矢量的模为 1。

因为

$$(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2$$

所以

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2}=\sqrt{\frac{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}{(\mathrm{d}s)^2}}=1$$

1.30　试求曲线 $x=a\cos\omega t,y=a\sin\omega t,z=bt$ (a,b,ω 是常数) 上任一点的切线单位矢量。

答　$\frac{-a\omega\sin\omega t\boldsymbol{i}+a\omega\cos\omega t\boldsymbol{j}+b\boldsymbol{k}}{\sqrt{a^2\omega^2+b^2}}$。

1.31　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是标量 u 的可导函数，试证：

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}$；(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{b}$。

证 方法一

(1) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}\cdot\Delta\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\cdot\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}+\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{\Delta\boldsymbol{a}\cdot\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}\right)$$

$$=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}$$

上式中$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{a}\cdot\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}=0$。

(2) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}\times\Delta\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{a}\times\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\boldsymbol{a}\times\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}+\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}\times\boldsymbol{b}+\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}\times\Delta\boldsymbol{b}\right)$$

$$=\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{b}$$

上式中$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}\times\Delta\boldsymbol{b}=0$。

方法二

(1) 设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$

$$=\left(a_1\frac{\mathrm{d}b_1}{\mathrm{d}t}+a_2\frac{\mathrm{d}b_2}{\mathrm{d}t}+a_3\frac{\mathrm{d}b_3}{\mathrm{d}t}\right)+\left(\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t}b_1+\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}b_2+\frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}t}b_3\right)$$

$$=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}$$

(2) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$

利用行列式的求导定理，得

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\\frac{\mathrm{d}b_1}{\mathrm{d}t}&\frac{\mathrm{d}b_2}{\mathrm{d}t}&\frac{\mathrm{d}b_3}{\mathrm{d}t}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t}&\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}&\frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}t}\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{b}$$

1.32　试求$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)$。

解　根据例题 1.28，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}+\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}$$

$$=a\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}+0+0$$

$$=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}$$

1.33　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是 s 的可导函数，试求$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}s}-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{b}\right)$。

答　$\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\boldsymbol{b}$。

1.34　设 $\boldsymbol{a}$ 的模为常量，且$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right|\neq0$，试证明 $\boldsymbol{a}$ 与$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$互相垂直。

证　因为 $\boldsymbol{a}$ 的模为常量，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=$常量。于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=0$$

可见 $\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=0$，$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right|\neq0$，必有 $\boldsymbol{a}$ 与$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$互相垂直。

1.35　设 $\boldsymbol{a}(t)=3t^2\boldsymbol{i}-(t+4)\boldsymbol{j}-(t^2-2t)\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}(t)=\sin t\boldsymbol{i}+3\mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{j}-3\cos t\boldsymbol{k}$，试求 $t=0$ 时的$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$。

答　$-30\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}+20\boldsymbol{k}$。

1.36　试证 $\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$。

证　方法一

设

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$$

则

$$a=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{-1/2}\left(2a_1\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t}+2a_2\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}+2a_3\frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$=\frac{a_1\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t}+a_2\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}+a_3\frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}}{a}$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

方法二

因为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a^2,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a^2)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$$

且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a^2)=2a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

所以

$$2\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=2a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

即

$$\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

如果 $\boldsymbol{a}$ 是常矢量，且 $\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=0$，就是题 1.34 所证的结果。

1.37 设 $\boldsymbol{F}$ 是 x,y,z,t 的函数，而 x,y,z 又是 t 的函数，并且都是可导函数，试证

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

证 设 $\boldsymbol{F}=F_1(x,y,z,t)\boldsymbol{i}+F_2(x,y,z,t)\boldsymbol{j}+F_3(x,y,z,t)\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}F&=\mathrm{d}F_1\boldsymbol{i}+\mathrm{d}F_2\boldsymbol{j}+\mathrm{d}F_3\boldsymbol{k}\\
&=\left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial F_1}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F_1}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F_1}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\boldsymbol{i}\\
&\quad+\left(\frac{\partial F_2}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial F_2}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F_2}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F_2}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\boldsymbol{j}\\
&\quad+\left(\frac{\partial F_3}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial F_3}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F_3}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F_3}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\boldsymbol{k}\\
&=\left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\boldsymbol{i}+\frac{\partial F_2}{\partial t}\boldsymbol{j}+\frac{\partial F_3}{\partial t}\boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}t+\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial F_2}{\partial x}\boldsymbol{j}+\frac{\partial F_3}{\partial x}\boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}x\\
&\quad+\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial F_3}{\partial y}\boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\boldsymbol{i}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\boldsymbol{j}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}z\\
&=\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial z}\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

1.38　设 $\boldsymbol{a}=\cos xy\boldsymbol{i}+(3xy-2x^2)\boldsymbol{j}-(3x-2y)\boldsymbol{k}$，试求：$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}$，$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y\partial x}$。

答　$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}=y\sin xy\boldsymbol{i}+(3y-4x)\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}=-x\sin xy\boldsymbol{i}+3x\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x^2}=-y^2\cos xy\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y^2}=-x^2\cos xy\boldsymbol{i}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y\partial x}=-(xy\cos xy+\sin xy)\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$$

1.39　设 $\boldsymbol{a}=x^2yz\boldsymbol{i}-2xz^3\boldsymbol{j}+xz^2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2z\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-x^2\boldsymbol{k}$，试求点(1，0，−2)的$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$。

解　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x^2yz & -2xz^3 & xz^2\\ 2z & y & -x^2\end{vmatrix}$

$$=(2x^3y^3-xyz^2)\boldsymbol{i}+(2xz^3+x^4yz)\boldsymbol{j}+(x^2y^2z+4xz^4)\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\partial x}=(6x^2z^3-yz^2)\boldsymbol{i}+(2z^3+4x^3yz)\boldsymbol{j}+(2xy^2z+4z^4)\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial^2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\partial x\partial y}=-z^2\boldsymbol{i}+4x^3z\boldsymbol{j}+4xyz\boldsymbol{k}$$

在点(1，0，−2)处，$\frac{\partial^2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\partial x\partial y}=-4\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}$。

1.41　设 $\boldsymbol{R}(u)=(u-u^2)\boldsymbol{i}+2u^3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，试求：(1) $\int\boldsymbol{R}(u)\mathrm{d}u$；(2) $\int_1^2\boldsymbol{R}(u)\mathrm{d}u$。

解　(1) $\int\boldsymbol{R}(u)\mathrm{d}u=\int[(u-u^2)\boldsymbol{i}+2u^3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}]\mathrm{d}u$

$$=\boldsymbol{i}\int(u-u^2)\mathrm{d}u+\boldsymbol{j}\int 2u^3\mathrm{d}u+\boldsymbol{k}\int-3\mathrm{d}u$$

$$=\boldsymbol{i}\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}+c_1\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{u^4}{2}+c_2\right)+\boldsymbol{k}(-3u+c_3)$$

$$=\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}\right)\boldsymbol{i}+\frac{u^4}{2}\boldsymbol{j}-3u\boldsymbol{k}+\boldsymbol{c}$$

式中 $\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$。

(2) $\int_1^2 \boldsymbol{R}(u)\mathrm{d}u=\left[\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}\right)\boldsymbol{i}+\frac{u^4}{2}\boldsymbol{j}-3u\boldsymbol{k}+\boldsymbol{c}\right]_1^2=-\frac{5}{6}\boldsymbol{i}+\frac{15}{2}\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$。

1.42 试求 $\int \boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}t$。

解 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right)=\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}$

所以

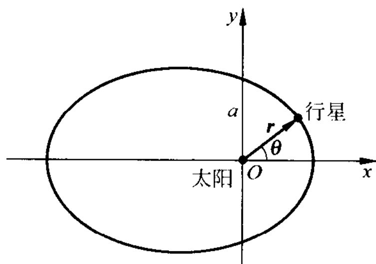
$$\int \boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t=\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}+c$$

1.43 证明行星的轨道是椭圆,太阳是椭圆的一个焦点(题 1.43 图)。

证 由理论力学知,质点在有心力作用下的运动微分方程及其动量矩可写为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{r}_1,\ 即\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\frac{GM}{r^2}\boldsymbol{r}_1 \quad (a)$$

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{H}=\boldsymbol{h} \quad (b)$$



题 1.43 图

又

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{r}_1,\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}_1$$

即

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=r\boldsymbol{r}_1\times\left(r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}_1\right)=r^2\boldsymbol{r}_1\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t} \quad (c)$$

由式(a),得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{h}=-\frac{GM}{r^2}\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{h}=-GM\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_1\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}$$
$$=-GM\left[\left(\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}\right)\boldsymbol{r}_1-(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_1)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}\right]=GM\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}$$

上式是因为 $\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}=0$(见题 1.34)。

但由于 $\boldsymbol{h}$ 是常矢,$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{h})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{h}$,所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{h})=GM\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}$$

积分得

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{h}=GM\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{p}$$

由此

$$\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{h})=GM\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}$$
$$=GMr+r\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{p}=GMr+rp\cos\theta$$

式中，$\boldsymbol{p}$ 是模为 p 的任意常矢，θ 是 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{r}_1$ 的夹角。

因为

$$\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{h})=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{h}=\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h}=h^2$$

故有

$$h^2=GMr+rp\cos\theta$$

$$r=\frac{h^2}{GM+p\cos\theta}=\frac{h^2/GM}{1+(p/GM)\cos\theta}$$

由解析几何可知，焦点在原点，偏心率为 ε 的圆锥截面极坐标方程是

$$r=\frac{a}{r+\varepsilon\cos\theta}$$

式中，a 为常数。将这个方程与上面所推得的方程比较，而且行星的轨道是封闭曲线，所以行星的轨道是椭圆曲线。

1.44 设 $\Phi(x,y,z)=3x^2y-y^3z^2$，试求在点 $P(1,-2,1)$ 的 $\nabla\Phi$（即 $\mathrm{grad}\Phi$）。

解 $\nabla\Phi=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)(3x^2y-y^3z^2)$

$$=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y-y^3z^2)+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y-y^3z^2)+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}(3x^2y-y^3z^2)$$

$$=6xy\boldsymbol{i}+(3x^2-3y^2z^2)\boldsymbol{j}-2y^3z\boldsymbol{k}$$

$$=-12\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}-16\boldsymbol{k}$$

1.45 设 $\boldsymbol{a}=2x^2\boldsymbol{i}-3xz\boldsymbol{j}+xz^2\boldsymbol{k}$，$\Phi=2x-x^3y$，试求在点 $P(1,-1,1)$ 的 $\boldsymbol{a}\cdot\nabla\Phi$ 与 $\boldsymbol{a}\times\nabla\Phi$。

答 5，$7\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}$。

1.46 设(1) $\Phi=\ln|\boldsymbol{r}|$；(2) $\Phi=\frac{1}{r}$，试求 $\nabla\Phi$。

解 (1) $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\Phi=\ln|\boldsymbol{r}|=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$$

$$\nabla\Phi=\frac{1}{2}\nabla\ln(x^2+y^2+z^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+y^2+z^2)+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2+z^2)+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\ln(x^2+y^2+z^2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{i}\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}+\boldsymbol{j}\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}+\boldsymbol{k}\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})/(x^2+y^2+z^2)=\boldsymbol{r}/r^2$$

(2) $\nabla\Phi=\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\nabla\left[(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$

$$=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\boldsymbol{i}\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}2x\right]+\boldsymbol{j}\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}2y\right]$$

$$+\boldsymbol{k}\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}2z\right]$$

$$=-\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=-\boldsymbol{r}/r^3$$

1.47 试证$\nabla r^n=nr^{n-2}\boldsymbol{r}$。

证 $\nabla r^n=\nabla(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^n=\nabla(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}$

$$=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}\right]+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}\left[(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}\right]$$

$$+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\left[(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}\right]$$

$$=\boldsymbol{i}\left[\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}2x\right]+\boldsymbol{j}\left[\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}2y\right]$$

$$+\boldsymbol{k}\left[\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}2z\right]$$

$$=n(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$$

$$=n(r^2)^{\frac{n}{2}-1}\boldsymbol{r}=nr^{n-2}\boldsymbol{r}$$

注意，若$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{r}_1$，式中$\boldsymbol{r}_1$是$\boldsymbol{r}$方向的单位矢量，则$\nabla r^n=nr^{n-1}\boldsymbol{r}_1$。

1.48 试求$\nabla(3r^2-4\sqrt{r}+6/\sqrt[3]{r})$。

答 $(6-2r^{-\frac{3}{2}}-2r^{-\frac{7}{3}})\boldsymbol{r}$。

1.49 试证$\nabla\Phi$垂直于曲面$\Phi(x,y,z)=C$，式中C为常数。

证 设$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$是曲面上点$P(x,y,z)$的位矢，则$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$在曲面过点$P$的切平面内。但

$$\mathrm{d}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathrm{d}z=0$$

或

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k})=0$$

即

$$\nabla\Phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$$

所以$\nabla\Phi$垂直于$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，也就垂直于曲面。

1.50 试求曲面 $2xz^2-3xy-4x=7$ 在点(1,-1,2)的切平面方程。

解 $\nabla(2xz^2-3xy-4x)=(2z^2-3y-4)\boldsymbol{i}-3x\boldsymbol{j}+4xz\boldsymbol{k}$,过点(1,-1,2)曲面的法线是 $7\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$,过位矢为 $\boldsymbol{r}_o$ 的一点并与法线 $\boldsymbol{N}$ 垂直的平面方程为 $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_o)\cdot\boldsymbol{N}=0$,所以要求的方程是

$$[(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})-(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})]\cdot(7\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})=0$$

即

$$7(x-1)-3(y+1)+8(z-2)=0$$

1.51 试求曲面 $z=x^2+y^2$ 在点(2,-1,5)的切平面方程与法线方程。

答 $4x-2y-z=5$,$\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-5}{-1}$ 或 $x=4t+2,y=-2t-1,z=-t+5$。

1.52 试证 Φ 的最大变化率(即最大方向导数)的模与方向就是 $\nabla\Phi$ 的模与方向。

证
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}&=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\\&=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}\right)\\&=\nabla\Phi\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\end{aligned}$$

因为 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ 是单位矢量,$\nabla\Phi\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ 是 $\nabla\Phi$ 沿 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ 方向的投影。当 $\nabla\Phi$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ 同方向时,其投影为最大,所以方向导数 $\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}$ 的最大值是 $|\nabla\Phi|$,$\nabla\Phi$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ 同向。

1.53 设 $\Phi=axy^2+byz+cz^2x^3$ 在点(1,2,-1)的梯度 $\nabla\Phi$ 平行于 z 轴,模的最大值为 64,试求常数 a,b,c 的值。

答 $a=b,b=24,c=-8$。

1.54 试求曲面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与 $z=x^2+y^2-3$ 在点(2,-1,2)的夹角。

解 两曲面在某点的夹角定义为两曲面过该点法线之间的夹角。

过点(2,-1,2)的曲面 $x^2+y^2+z^2=9$ 的法线为

$$\nabla\Phi_1=\nabla(x^2+y^2+z^2)=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$$

过点(2,-1,2)的曲面 $z=x^2+y^2-3$(或 $x^2+y^2-z=3$)的法线为

$$\nabla\Phi_2=\nabla(x^2+y^2-z)=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

$(\nabla\Phi_1)\cdot(\nabla\Phi_2)=|\nabla\Phi_1||\nabla\Phi_2|\cos\theta$,式中 θ 就是所要求的夹角。于是

$$(4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\cdot(4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})=|4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}||4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}|\cos\theta$$

$$16+4-4=\sqrt{(4)^2+(-2)^2+(4)^2}\sqrt{(4)^2+(-2)^2+(-1)^2}\cos\theta$$

$$\cos\theta=8\sqrt{21}/63=0.5819,\theta=54°25'$$

1.55 已知 $\Phi=2x^3y^2z^4$，试求 $\nabla\cdot\nabla\Phi$（即 div gradΦ），并证明 $\nabla\cdot\nabla\Phi=\nabla^2\Phi$。

解 (1) $\nabla\Phi=\boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x}(2x^3y^2z^4)+\boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial x}(2x^3y^2z^4)+\boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial x}(2x^3y^2z^4)$

$$=6x^2y^2z^4\boldsymbol{i}+4x^3yz^4\boldsymbol{j}+8x^3y^2z^3\boldsymbol{k}$$

$$\nabla\cdot\nabla\Phi=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(6x^2y^2z^4\boldsymbol{i}+4x^3yz^4\boldsymbol{j}+8x^3y^2z^3\boldsymbol{k})$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(6x^2y^2z^4)+\frac{\partial}{\partial y}(4x^3yz^4)+\frac{\partial}{\partial z}(8x^3y^2z^3)$$

$$=12xy^2z^4+4x^3z^4+24x^3y^2z^2$$

(2) $\nabla\cdot\nabla\Phi=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi=\nabla^2\Phi$$

1.56 试证：(1) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla\cdot\boldsymbol{b}$；(2) $\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{a})=(\nabla\Phi)\cdot\boldsymbol{a}+\Phi(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$。

证 设

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$$

(1) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot[(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k}]$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(a_1+b_1)+\frac{\partial}{\partial y}(a_2+b_2)+\frac{\partial}{\partial z}(a_3+b_3)$$

$$=\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial a_2}{\partial y}+\frac{\partial a_3}{\partial z}+\frac{\partial b_1}{\partial x}+\frac{\partial b_2}{\partial y}+\frac{\partial b_3}{\partial z}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})$$

$$=\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla\cdot\boldsymbol{b}$$

(2) $\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{a})=\nabla\cdot(\Phi a_1\boldsymbol{i}+\Phi a_2\boldsymbol{j}+\Phi a_3\boldsymbol{k})$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(\Phi a_1)+\frac{\partial}{\partial y}(\Phi a_2)+\frac{\partial}{\partial z}(\Phi a_3)$$

$$=\frac{\partial\Phi}{\partial x}a_1+\Phi\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}a_2+\Phi\frac{\partial a_2}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}a_3+\Phi\frac{\partial a_3}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial\Phi}{\partial x}a_1+\frac{\partial\Phi}{\partial y}a_2+\frac{\partial\Phi}{\partial z}a_3+\Phi\left(\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial a_2}{\partial y}+\frac{\partial a_3}{\partial z}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})$$

$$+\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})$$

$$=(\nabla\Phi)\cdot\boldsymbol{a}+\Phi(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$$

1.57　试证$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=0$。

证　设$\Phi=r^{-3}$，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}$，代入题 1.56(2)，得

$$\nabla\cdot(r^{-3}\boldsymbol{r})=(\nabla r^{-3})\cdot\boldsymbol{r}+(r^{-3})\nabla\cdot\boldsymbol{r}$$

$$=-3r^{-5}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}+3r^{-3}=0$$

上式利用了题 1.47 的结果。

1.58　设$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}/r^n$，$n>0$（其中$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$），试求$\nabla\cdot\boldsymbol{a}$。

解　$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^n}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^n}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^n}\right)$$

$$=\frac{1}{r^n}-\frac{nxx}{r^{n+1}r}+\frac{1}{r^n}-\frac{nyy}{r^{n+1}r}+\frac{1}{r^n}-\frac{nzz}{r^{n+1}r}$$

$$=\frac{3}{r^n}-\frac{nr^2}{r^{n+2}}=\frac{3-n}{r^n}$$

1.59　试求：(1) $\nabla\cdot(r^3\boldsymbol{r})$；(2) $\nabla\cdot[r\nabla(1/r^3)]$；(3) $\nabla^2[\nabla\cdot(\boldsymbol{r}/r^2)]$。

答　(1) $6r^3$；(2) $3r^{-4}$；(3) $2r^{-4}$。

1.60　设$\boldsymbol{a}=xz^3\boldsymbol{i}-2x^2yz\boldsymbol{j}+2yz^4\boldsymbol{k}$，试求在点(1，−1，1)的$\nabla\times\boldsymbol{a}$（即 $\mathrm{curl}\boldsymbol{a}$）。

解　$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\times(xz^3\boldsymbol{i}-2x^2yz\boldsymbol{j}+2yz^4\boldsymbol{k})$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4\end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}(2yz^4)-\frac{\partial}{\partial z}(-2x^2yz)\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(xz^3)-\frac{\partial}{\partial x}(2yz^4)\right]\boldsymbol{j}$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}(-2x^2yz)+\frac{\partial}{\partial y}(xz^3)\right]\boldsymbol{k}$$

$$=(2z^4+2x^2y)\boldsymbol{i}+3xz^2\boldsymbol{j}-4xyz\boldsymbol{k}$$

在点(1，−1，1)，$\nabla\times\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$。

1.61　设$\boldsymbol{a}=2xz^2\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+3xz^3\boldsymbol{k}$，$\Phi=x^2yz$，试求在点(1，−1，1)处的：(1) $\nabla\times\boldsymbol{a}$；(2) $\mathrm{curl}(\Phi\boldsymbol{a})$；(3) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})$；(4) $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{a})$；(5) $\mathrm{curl\ grad}(\Phi\boldsymbol{a})$。

答　(1) $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$；(2) $5\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$；(3) $5\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$；(4) $-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$；(5) $\boldsymbol{0}$。

1.62　设$\nabla\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，试求$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$。

解　设$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ x & y & z\end{vmatrix}=(za_2-ya_3)\boldsymbol{i}+(xa_3-za_1)\boldsymbol{j}+(ya_1-xa_2)\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})&=\frac{\partial}{\partial x}(za_2-ya_3)+\frac{\partial}{\partial y}(xa_3-za_1)+\frac{\partial}{\partial z}(ya_1-xa_2)\\&=z\frac{\partial a_2}{\partial x}-y\frac{\partial a_3}{\partial x}+x\frac{\partial a_3}{\partial y}-z\frac{\partial a_1}{\partial y}+y\frac{\partial a_1}{\partial z}-x\frac{\partial a_2}{\partial z}\\&=x\left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)+y\left(\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}\right)+z\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\\&=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\cdot\left[\left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]\\&=\boldsymbol{r}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})\end{aligned}$$

若$\nabla\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,则$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$。

1.63 试求$\nabla\times\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2}\right)$。

答 **0**。

1.64 试证:(1) $\nabla\times(\nabla\Phi)=\boldsymbol{0}$;(2) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$。

证 (1)
$$\nabla\times(\nabla\Phi)=\nabla\times\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} & \frac{\partial\Phi}{\partial y} & \frac{\partial\Phi}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]\boldsymbol{j}\\&\quad+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right]\boldsymbol{k}\\&=\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}\right)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})&=\nabla\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}\\&=\nabla\cdot\left[\left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\\&=\frac{\partial^2 a_3}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 a_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 a_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 a_3}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 a_1}{\partial z\partial y}=0\end{aligned}$$

上面的证明过程中，假设 Φ、$\boldsymbol{a}$ 都存在二阶偏导数。

由以上证明可以推得 $(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}m)=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c})m=\boldsymbol{0}$，式中 m 是标量，$\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=0$。

1.65　设 $f(r)$ 可导，试求 $\mathrm{curl}(\boldsymbol{r}f(r))$。

证　
$$\begin{aligned}\mathrm{curl}(\boldsymbol{r}f(r))&=\nabla\times(\boldsymbol{r}f(r))\\&=\nabla\times[xf(r)\boldsymbol{i}+yf(r)\boldsymbol{j}+zf(r)\boldsymbol{k}]\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\xf(r)&yf(r)&zf(r)\end{vmatrix}\\&=\left(z\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(x\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial f}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

但

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{f'(r)x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{f'x}{r}$$

同理

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{f'y}{r},\quad\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{f'z}{r}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{curl}(\boldsymbol{r}f(r))=&\left(z\frac{f'y}{r}-y\frac{f'z}{r}\right)\boldsymbol{i}+\left(x\frac{f'z}{r}-z\frac{f'x}{r}\right)\boldsymbol{j}\\&+\left(y\frac{f'x}{r}-x\frac{f'y}{r}\right)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

1.66　试证 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=-\nabla^2\boldsymbol{a}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$。

证　将 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\nabla$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{F}$ 代入式(1.18)，得

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})-(\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{F}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})-\nabla^2\boldsymbol{F}$$

注意，以算子代的 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 应在 $\boldsymbol{c}$ 之前，否则式(1.18)不能直接利用。此题也可用直接展开法证明。

1.67　设 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{\omega}$ 是常矢，试证 $\boldsymbol{\omega}=\dfrac{1}{2}\mathrm{curl}\boldsymbol{V}$。

证　
$$\begin{aligned}\mathrm{curl}\boldsymbol{V}=\nabla\times\boldsymbol{V}=\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\omega_1&\omega_2&\omega_3\\x&y&z\end{vmatrix}\\&=\nabla\times[(\omega_2z-\omega_3y)\boldsymbol{i}+(\omega_3x-\omega_1z)\boldsymbol{j}+(\omega_1y-\omega_2x)\boldsymbol{k}]\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\\omega_2z-\omega_3y&\omega_3x-\omega_1z&\omega_1y-\omega_2x\end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$=2(\omega_1+\omega_2\boldsymbol{j}+\omega_3\boldsymbol{k})=2\boldsymbol{\omega}$$

于是

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{V}=\frac{1}{2}\text{curl}\boldsymbol{V}$$

1.68 设 $\Phi(x,y,z)$ 对于轴的旋转是一标量不变量，试证 $\text{grad}\Phi$ 在这种变换下是一矢量不变量。

证 根据假设 $\Phi(x,y,z)=\bar{\Phi}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，所要证明的是 $\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}=\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{x}}\bar{\boldsymbol{i}}+\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{y}}\bar{\boldsymbol{j}}+\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{z}}\bar{\boldsymbol{k}}$。

因为

$$\bar{x}=\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z$$
$$\bar{y}=\alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z$$
$$\bar{z}=\alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}z$$

利用链式规则，有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{x}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{z}}{\partial x}=\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{x}}\alpha_{11}+\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{y}}\alpha_{21}+\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{z}}\alpha_{31}$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{x}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{z}}{\partial y}=\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{x}}\alpha_{12}+\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{y}}\alpha_{22}+\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{z}}\alpha_{32}$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{x}}{\partial z}+\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial z}+\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{z}}{\partial z}=\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{x}}\alpha_{13}+\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{y}}\alpha_{23}+\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{z}}\alpha_{33}$$

将上面三式分别乘以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，再相加，应用式(1.98)即可得所要求证明的结果。

1.69 设 $\boldsymbol{a}=(3x^2+6y)\boldsymbol{i}-14yz\boldsymbol{j}+20xz^2\boldsymbol{k}$，试求从点(0,0,0)到点(1,1,1)的积分 $\int_C\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，所沿路径 C 是：(1) $x=t,y=t^2,z=t^3$；(2) 直线从点(0,0,0)到点(1,0,0)，再到点(1,1,0)，最后到点(1,1,1)；(3) 点(0,0,0)到点(1,1,1)连成的直线。

解 $\int_C\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_C[(3x^2+by)\boldsymbol{i}-14yz\boldsymbol{j}+20xz^2\boldsymbol{k}]\cdot(\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k})$

$$=\int_C(3x^2+6y)\mathrm{d}x-14yz\mathrm{d}y+20xz^2\mathrm{d}z$$

(1) 若 $x=t,y=t^2,z=t^3$，点(0,0,0)、(1,1,1)对应于 $t=0,t=1$，所以

$$\int_{t=0}^1(9t^2-28t^6+60t^9)\mathrm{d}t=3t^3-4t^7+6t^{10}\Big|_0^1=5$$

(2) 沿直线从(0,0,0)到(1,0,0)，$y=0,z=0,\mathrm{d}y=0,\mathrm{d}z=0$，而 x 由 0 变到 1，于是沿这一部分路径的积分

$$\int_C\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^1(3x^2+6\times0)\mathrm{d}x-14\times0\times0\times0+20x\times0^2\times0$$
$$=x^3\Big|_0^1=1$$

从点(1,0,0)到点(1,1,0)，$x=1,z=0,\mathrm{d}x=0,\mathrm{d}z=0$，而 y 由 0 变到 1，

$$\int_0^1((3\times1^2+6y)\times0-14y\times0)\mathrm{d}y+20\times1\times0^2\times0=0$$

从点(1,1,0)到点(1,1,1)，$x=1,y=1,\mathrm{d}x=0,\mathrm{d}y=0$，而 z 由 0 变到 1，

$$\int_0^1 20z^2\mathrm{d}z=\frac{20}{3}$$

所以

$$\int_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=1+0+\frac{20}{3}=\frac{23}{3}$$

(3) 点(0,0,0)到点(1,1,1)的直线参数方程为 $x=t,y=t,z=t$，所以

$$\int_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^1((3t^2+6t)-14(t)(t)+20(t)(t)^2)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1(6t-11t^2+20t^3)\mathrm{d}t=\frac{13}{3}$$

1.70　设 $\boldsymbol{a}=(2y+3)\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+(yz-x)\boldsymbol{k}$，试求积分 $\int_C\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，沿的路径 C 及其始、终点如下：(1) $x=2t^2,y=t,z=t^3$，从 $t=0$ 到 $t=1$；(2) 直线从点(0,0,0)到点(0,0,1)，再到点(0,1,1)，最后到点(2,1,1)；(3) 点(0,0,0)到点(2,1,1)连成的直线。

答　(1) 288/35；(2) 10；(3) 8。

1.71　(1) 若 $\boldsymbol{F}=\nabla\Phi$，式中 Φ 是单值连续函数，且其偏导数存在，试证明在该场中，力 $\boldsymbol{F}$ 做的功与两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 连接的路径无关；(2) 反之，$\int_C\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与两点连接的路径无关，证明函数 Φ 恰好满足 $\boldsymbol{F}=\nabla\Phi$。

证　(1) 力的功 $=\int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{P_1}^{P_2}\nabla\Phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$

$$=\int_{P_1}^{P_2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k})$$

$$=\int_{P_1}^{P_2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$=\int_{P_1}^{P_2}\mathrm{d}\Phi=\Phi(P_2)-\Phi(P_1)$$

$$=\Phi(x_2,y_2,z_2)-\Phi(x_1,y_1,z_1)$$

这就证明了，若 $\Phi(x,y,z)$ 对于所有的点 P_1,P_2 都是单值连续函数，上述积分仅与 P_1,P_2 两点有关，而与路径无关。

(2) 若 $\int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与连接点 P_1,P_2 的曲线 C 无关，$\boldsymbol{F}$ 称为保守场。

$$\Phi(x,y,z)=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)}\boldsymbol{F}\cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s$$

将等式进行微分，得

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}=F\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$$

但$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}=\nabla\Phi\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$，于是

$$(\nabla\Phi-\boldsymbol{F})\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=0$$

因为要保持$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$的独立性，所以有 $\boldsymbol{F}=\nabla\Phi$。

1.72 (1) 若 $\boldsymbol{F}$ 是保守场，试证 $\mathrm{curl}\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$(即无旋场)；(2)反之，若$\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{F}$ 是保守场。

证 (1) 若 $\boldsymbol{F}$ 是保守场，根据题 1.71 知 $\boldsymbol{F}=\nabla\Phi$，根据题 1.64(1)可知

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F}=\nabla\times\nabla\Phi=\boldsymbol{0}$$

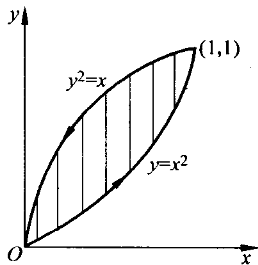
(2) 由读者证明。

提示 若$\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$，则$\frac{\partial F_3}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial z},\frac{\partial F_1}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial x},\frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial y}$，再证$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=F_3,\frac{\partial\Phi}{\partial y}=F_2$，$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=F_1$，于是

$$\boldsymbol{F}=F_1\boldsymbol{i}+F_2\boldsymbol{j}+F_3\boldsymbol{k}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k}=\nabla\Phi$$

1.73 设 $\boldsymbol{a}=(x-y)\boldsymbol{i}+(x+y)\boldsymbol{j}$，试求沿题 1.73 图的路径的积分$\oint_C\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。

答 2/3。



题 1.73 图

1.74 设 $\Phi=2xyz^2$，$\boldsymbol{F}=xy\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$，路径 C 是曲线 $x=t^2,y=2t,z=t^3$，试求沿此路径从 $t=0$ 到 $t=1$ 的下列积分：(1) $\int_C\Phi\mathrm{d}\boldsymbol{r}$；(2) $\int_C\boldsymbol{F}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。

解 (1) 沿 C，

$$\Phi=2xyz^2=2(t)^2(2t)(t^3)^2=4t^9$$

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=t^2\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(2t\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3t^2\boldsymbol{k})\mathrm{d}t$$

$$\int_C\Phi\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^1 4t^9(2t\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3t^2\boldsymbol{k})\mathrm{d}t=\frac{8}{11}\boldsymbol{i}+\frac{4}{5}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

(2) 沿 C，

$$\boldsymbol{F}=xy\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}=2t^3\boldsymbol{i}-t^3\boldsymbol{j}+t^4\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{F}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}=[(-3t^5-2t^4)\boldsymbol{i}+(2t^5-6t^5)\boldsymbol{j}+(4t^3+2t^4)\boldsymbol{k}]\mathrm{d}t$$

$$\int_C \boldsymbol{F}\times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\int_0^1(-3t^5-2t^4)\mathrm{d}t+\boldsymbol{j}\int_0^1(-4t^5)\mathrm{d}t+\boldsymbol{k}\int_0^1(4t^3+2t^4)\mathrm{d}t$$

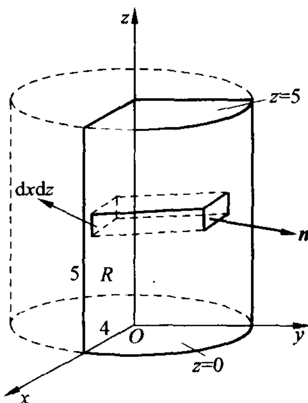
$$=-\frac{9}{10}\boldsymbol{i}-\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{7}{5}\boldsymbol{k}$$

1.75　(1) 试证 $\boldsymbol{F}=(y^2\cos x+z^3)\boldsymbol{i}+(2y\sin x-4)\boldsymbol{j}+(3xz^2+2)\boldsymbol{k}$ 是保守力场；(2) 求 $\boldsymbol{F}$ 的势(标量)；(3) 求从点 $(0,1,-1)$ 到点 $(\pi/2,-1,2)$ 力 $\boldsymbol{F}$ 做的功。

答　(2) $\Phi=y^2\sin x+xz^3-4y+2z+C$；(3) $15+4\pi$。

1.76　计算 $\iint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$，式中 $\boldsymbol{a}=z\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}-3y^2z\boldsymbol{k}$，$S$ 是从 $z=0$ 到 $z=5$ 第一象限 $x^2+y^2=16$ 的圆柱表面，$\boldsymbol{n}$ 是 S 的法线单位矢量。

解　S 在 xz 平面内的投影记作 R（见题 1.76 图）。



题 1.76 图

$$\iint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint_R \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}|}$$

$x^2+y^2=16$ 的法线为 $\nabla(x^2+y^2)=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}$，$S$ 的法线单位矢量

$$\boldsymbol{n}=\frac{2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2}}=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{4}$$

因为 S 的表面为 $x^2+y^2=16$，所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=(z\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}-3y^2z\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(xz+xy)$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}=\left(\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{4}\right)\boldsymbol{j}=\frac{y}{4}$$

$$\iint_R\frac{xz+xy}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\int_0^5\int_0^4\left(\frac{xz}{\sqrt{16-x^2}}+x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

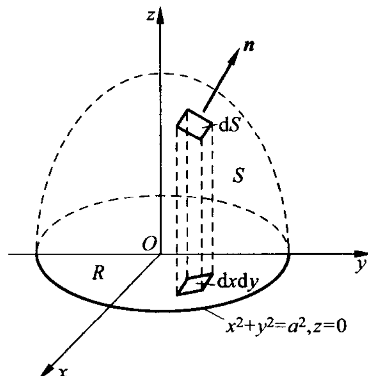
$$=\int_0^5(4z+8)\mathrm{d}z=80$$

1.77　设 $\boldsymbol{a}=(3x+y)\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}+(y-2)\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，试计算积分 $\oint_C(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。积分路径是沿 xy 平面的圆周，圆心在原点，半径为 2，逆时针方向。

答　$4\pi(7\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j})$。

1.78　设 $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}+(x-2xz)\boldsymbol{j}-xy\boldsymbol{k}$，试计算积分 $\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$。式中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在 xy 平面的上部表面。

解　$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & x-2xz & -xy\end{vmatrix}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-2z\boldsymbol{k}$$



题 1.78 图

$x^2+y^2+z^2=a^2$ 的法线

$$\nabla(x^2+y^2+z^2)=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$$

法线单位矢量

$$\boldsymbol{n}=\frac{2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{a}$$

$$\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint_R(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}|}$$
$$=\iint_R(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-2z\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{a}\right)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z/a}$$
$$=\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{3(x^2+y^2)+a^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

用极坐标 $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi, \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$，上述积分化为

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{3\rho^2-2a^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{3(\rho^2-a^2)+a^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^a\left(-3\rho\sqrt{a^2-\rho^2}+\frac{a^2\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\right)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[(a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}-a^2\sqrt{a^2-\rho^2}\,\Big|_{\rho=0}^{a}\right]\mathrm{d}\varphi$$
$$=\int_0^{2\pi}(a^3-a^3)\mathrm{d}\varphi=0$$

1.79　计算下列两种情况下的积分 $\iint_S\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$。(1) $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}+2x\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}$，$S$ 是第一象限内 $2x+y=b$ 平面的顶部被 $z=4$ 平面所切的表面；(2) $\boldsymbol{a}=(x+y^2)\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j}+2yz\boldsymbol{k}$，$S$ 是第一象限内 $2x+y+2z=6$ 平面的表面。

答　(1) 108；(2) 81。

1.80　设 $\boldsymbol{F}=4xz\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+yz\boldsymbol{k}$，试计算 $\iint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$。$S$ 是一立方体的表面，其边界为 $x=0, x=1; y=0, y=1; z=0, z=1$（题 1.80 图）。

解　$DEFG$ 面：$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}, x=1$，则

$$\iint_{DEFG} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_0^1\int_0^1(4z\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+yz\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{i}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\int_0^1 4z\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2$$

$ABCO$ 面：$\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{i},x=0$，则

$$\iint_{ABCO}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_0^1\int_0^1(-y^2\boldsymbol{j}+yz\boldsymbol{k})\cdot(-\boldsymbol{i})\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

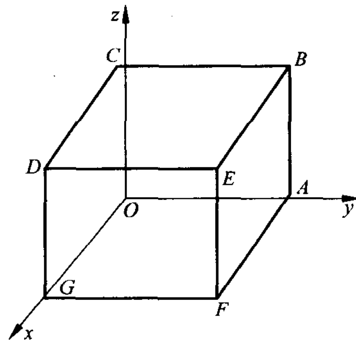
$$=0$$

同理可算得

$$\iint_{ABEF}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=-1,\quad \iint_{OGDC}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0$$

$$\iint_{BCDE}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\frac{1}{2},\quad \iint_{AFGO}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0$$

总和 $\iint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=2+0+(-1)+0+\frac{1}{2}+0=\frac{3}{2}$



题 1.80 图

1.81　计算 $\int_{(0,0)}^{(2,1)}(10x^4-2xy^3)\mathrm{d}x-3x^2y^2\mathrm{d}y$，沿的路径是 $x^4-6xy^3=4y^2$。

解　方法一

$M=10x^4-2xy^3,N=-3x^2y^2,\frac{\partial M}{\partial y}=-6xy^2=\frac{\partial N}{\partial x}$，所以与积分路径无关。我们可沿任何路径积分，例如，取点(0,0)到点(2,0)与点(2,0)到点(2,1)两条直线。

从点(0,0)到点(2,0)的直线，$y=0,\mathrm{d}y=0$，积分为

$$\int_0^2 10x^4\mathrm{d}x=64$$

从点(2,0)到点(2,1)的直线，$x=2,\mathrm{d}x=0$，积分为

$$\int_0^1-12y^2\mathrm{d}y=-4$$

总的积分为

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)}(10x^4-2xy^3)\mathrm{d}x-3x^2y^2\mathrm{d}y=64-4=60$$

方法二

因 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，而 $(10x^4-2xy^3)\mathrm{d}x-3x^2y^2\mathrm{d}y$ 是 $2x^5-x^2y^3$ 的全微分，所以

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)}(10x^4-2xy^3)\mathrm{d}x-3x^2y^2\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(2,1)}\mathrm{d}(2x^5-x^2y^3)$$

$$=(2x^5-x^2y^3)\Big|_{(0,0)}^{(2,1)}=60$$

1.82　试证以曲线 C 单连封闭的图形面积由式 $\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$ 计算。

证　将 $M=-y,N=x$ 代入格林公式，得

$$\oint_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_R \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2A$$

式中,A 就是所求的面积,因此 $A = \frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$。

1.83 试证在单连通域里当且仅当处处都有$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$,则曲线 C 为封闭边界时,$\oint_C M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0$。

证 假设 M、N 在以曲线 C 为边界的域 R 中处处都连续并有偏导数,则可用格林定理。

$$\oint_C M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

若在 R 里$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$,显然

$$\oint_C M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0$$

反之,设对所有的曲线 C 有

$$\oint_C M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0$$

若$\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}>0$(在某一点 P),由导数的连续性,在 P 周围的域 A 里也有$\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}>0$。若域 A 的边界为 Γ,则

$$\oint_\Gamma M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = \iint_A \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$$

这与环绕任何封闭曲线积分为零的假设矛盾。同理$\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}<0$ 也是不成立的。所以对所有的点都有$\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0$。

1.84 设 $\boldsymbol{F} = \frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}$,(1) 求$\nabla \times \boldsymbol{F}$;(2) 计算沿任意封闭边界的积分$\oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$,并解释计算结果。

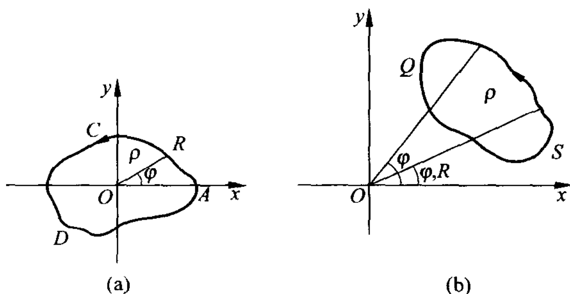
答 (1) **0**。

(2) 设 $x=\rho\cos\varphi$,$y=\rho\sin\varphi$,$\mathrm{d}x=-\rho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi+\mathrm{d}\rho\cos\varphi$,$\mathrm{d}y=\rho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi+\mathrm{d}\rho\sin\varphi$,则

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = \oint \mathrm{d}\varphi$$

对于图(a),

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi$$



题 1.84 图

对于图(b)，

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0} \mathrm{d}\varphi = 0$$

1.85　设 $\boldsymbol{a}=4x\boldsymbol{i}-2y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$，取 $x^2+y^2=4$ 和 $z=0$，$z=3$ 所围的域，验证斯托克斯定理。

证　体积积分

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{a}\mathrm{d}V = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(4x) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right]\mathrm{d}V$$

$$= \iiint_V (4 - 4y + 2z)\mathrm{d}V$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^3 (4 - 4y + 2z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 84\pi$$

将整个表面 S 划分为底面 $S_1(z=0)$、顶面 $S_2(z=3)$ 和柱筒表面 $S_3(x^2+y^2=4)$，则面积分

$$\iint_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iint_{S_1} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S_1 + \iint_{S_2} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S_2 + \iint_{S_3} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S_3$$

S_1：$\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{a}=4x\boldsymbol{i}-2y^2\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=0$，于是

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S_1 = 0$$

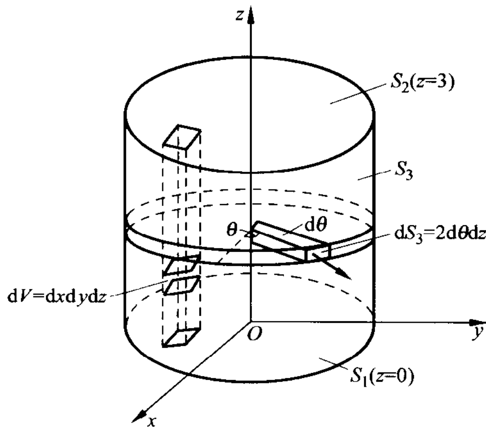
S_2：$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{a}=4x\boldsymbol{i}-2y^2\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=9$，于是

$$\iint_{S_2} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S_2 = 9\iint_{S_2}\mathrm{d}S_2 = 36\pi \text{（因 } S_2 \text{ 的面积是 } 4\pi\text{）}$$

S_3：$x^2+y^2=4$ 的法线 $\nabla(x^2+y^2)=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}$，于是

$$\boldsymbol{n}=\frac{2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}}{\sqrt{4x^2+4y^2}}=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{2}\text{（因为 }x^2+y^2=4\text{）}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=(4x\boldsymbol{i}-2y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{2}\right)=2x^2-y^3$$



题 1.85 图

由图可知 $x=2\cos\theta, y=2\sin\theta, dS_3=2d\theta dz$，于是

$$\iint_{S_3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}dS_3=\int_0^{2\pi}\int_0^3[2(2\cos\theta)^2-(2\sin\theta)^2]2dzd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(48\cos^2\theta-48\sin^3\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}48\cos^2\theta d\theta=48\pi$$

总的面积分

$$\iint_S\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}dS=0+36\pi+48\pi=84\pi$$

1.86　计算 $\iint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS$，式中 $\boldsymbol{F}=4xz\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+yz\boldsymbol{k}$，$S$ 是以 $x=0, x=1; y=0, y=1; z=0, z=1$ 为边界的立方体表面。

解　根据散度定理，所求的积分为

$$\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{F}dV=\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial x}(4xz)+\frac{\partial}{\partial y}(-y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(yz)\right]dV$$

$$=\iiint_V(4z-y)dV$$

$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(4z-y)dzdydx$$

$$=\int_0^1\int_0^1(2z^2-yz)\Big|_0^1\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\int_0^1(2-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$$

与题 1.80 用面积分算出的结果相同。

1.87 计算 $\iint\limits_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$,式中 S 是封闭曲面。

解 根据散度定理

$$\iint\limits_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint\limits_V \nabla\cdot\boldsymbol{r}\mathrm{d}V=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\mathrm{d}V$$

$$=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=3\iiint\limits_V\mathrm{d}V=3V$$

式中,V 是 S 所包容的体积。

1.88 试证 $\iiint\limits_V(\Phi\nabla^2\Psi-\Psi\nabla^2\Phi)\mathrm{d}V=\iint\limits_S(\Phi\nabla\Psi-\Psi\nabla\Phi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$。

提示 设 $\boldsymbol{a}=\Phi\nabla\Psi$,代入散度定理的公式。

1.89 试证 $\iiint\limits_V\nabla\Phi\mathrm{d}V=\iint\limits_S\Phi\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$。

证 令 $\boldsymbol{a}=\Phi\boldsymbol{C}$($\boldsymbol{C}$ 是常矢),代入散度定理的公式,则

$$\iiint\limits_V\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{C})\mathrm{d}V=\iint\limits_S\Phi\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

因为

$$\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{C})=(\nabla\Phi)\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\cdot\nabla\Phi,\quad \Phi\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{C}\cdot(\Phi\boldsymbol{n})$$

$$\iiint\limits_V\boldsymbol{C}\cdot\nabla\Phi\mathrm{d}V=\boldsymbol{C}\cdot\iint\limits_S\Phi\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

因为 $\boldsymbol{C}$ 是任意常矢,所以

$$\iiint\limits_V\nabla\Phi\mathrm{d}V=\iint\limits_S\Phi\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

1.90 试证 $\iiint\limits_V\nabla\times\boldsymbol{b}\mathrm{d}V=\iint\limits_S\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{b}\mathrm{d}S$。

提示 令 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$($\boldsymbol{c}$ 为常矢),代入散度定理的公式。

1.91 设 S 是一闭曲面,$\boldsymbol{r}$ 是任一点 $P(x,y,z)$ 从原点 O 量起的位矢。试证明:(1) 若原点 O 在 S 的外边,积分 $\iint\limits_S\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}S$ 为 0;(2) 若原点 O 在 S 的内部,积分 $\iint\limits_S\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}S=4\pi$。

证　(1) 根据散度定理$\iint\limits_S \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}S=\iiint\limits_V \nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V$,题 1.57 已证明$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=0$,若原点 O 在 $S(V)$ 的外边,则 V 中的处处都是 $r\neq 0$,所以$\iint\limits_S \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}S=0$。

(2) 若原点 O 在 S 内部,围绕 O 以半径 a 作一小球 s。令 τ 表示由 S 和 s 围成的域,根据散度定理

$$\iint\limits_{S+s}\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}S=\iint\limits_S\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}S+\iint\limits_s\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}S=\iint\limits_\tau \nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V=0$$

因为在 τ 域 $r\neq0$,于是

$$\iint\limits_S\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}S=-\iint\limits_s\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}S$$

在 S 上 $r=a$,$\boldsymbol{n}=-\frac{\boldsymbol{r}}{a}$,于是

$$\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{(-\boldsymbol{r}/a)\cdot\boldsymbol{r}}{a^3}=-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}{a^4}=-\frac{a^2}{a^4}=-\frac{1}{a^2}$$

$$\iint\limits_S\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}S=-\iint\limits_S\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}S=\iint\limits_S\frac{1}{a^2}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{a^2}\iint\limits_S\mathrm{d}S=\frac{4\pi a^2}{a^2}=4\pi$$

1.92　试证$\oint \mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{b}=\iint\limits_S(\boldsymbol{n}\times\nabla)\times\boldsymbol{b}\mathrm{d}S$。

提示　令 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$($\boldsymbol{c}$ 是常矢),代入斯托克斯定理的公式。

第 2 章　矩　　阵

2.1　如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-3&-2\\1&-5\\4&3\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\\t&u\end{pmatrix}$,使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$。

解　$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1-3-p&2-2-q\\3+1-r&4-5-s\\5+4-t&6+3-u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-p&-q\\4-r&-1-s\\9-t&9-u\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

故得

$$D=\begin{pmatrix}-2&0\\4&-1\\9&9\end{pmatrix}$$

2.2　设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\5&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&2&5\\2&0&4\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}4&1&2\\0&3&2\\1&-2&3\end{pmatrix}$，计算：(1) $A+B$；(2) $A-C$；(3) $-2A$。

答　(1) $\begin{pmatrix}4&1&-1\\9&2&7\\3&-1&4\end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix}-3&1&-5\\5&-3&0\\0&1&-2\end{pmatrix}$；(3) $\begin{pmatrix}-2&-4&6\\-10&0&-4\\-2&2&-2\end{pmatrix}$。

2.3　设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$，求 A^3。

解　$A^2=\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-3&1\\2&1&4\\3&-1&2\end{pmatrix}$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}5&-3&1\\2&1&4\\3&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&-8&0\\8&-1&8\\8&-4&3\end{pmatrix}$$

2.4　设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-3&2&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\1&2&3\end{pmatrix}$，计算 AB、BA。

解　$AB=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-3&2&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\1&2&3\end{pmatrix}=0$

$$BA=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-3&2&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11&6&-1\\-22&12&-2\\-11&6&-1\end{pmatrix}$$

可见，一般 $AB\neq BA$。

2.5　设 $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-1&2&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&0\\1&2\\0&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&-2&1+i\end{pmatrix}$，计算：(1) AB；(2) $C^{\mathrm T}A$。

解　(1) $AB=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2\\3&5\end{pmatrix}$

(2) $C^TA=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\\ 1 & 1+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2\times1+1\times(-1) & 2\times0+1\times2 & 2\times0+1\times2\\ (-1)\times1+(-2)(-1) & (-1)\times0+(-2)\times2 & (-1)(-2)+(-2)\times1\\ 1\times1+(1+i)(-1) & 1\times0+(1+i)\times2 & 1\times(-2)+(1+i)\times1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 4 & 0\\ -i & 2+2i & -1+i\end{bmatrix}$$

2.6 设 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}i & 1 & 0\\ -1 & 2-i & 2\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，计算：(1)$2A+C$；(2)$B^TC$；(3)$AC$；(4)$CA$。

答 (1) $\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 5 & -3\end{bmatrix}$；(2) $\begin{bmatrix}-1-i & 1+3i\\ 1-i & 1+i\\ 2 & -2\end{bmatrix}$；(3) $\begin{bmatrix}1 & -1\\ -3 & 7\end{bmatrix}$；(4) $\begin{bmatrix}6 & -4\\ -2 & 2\end{bmatrix}$

2.7 求下列矩阵 X。

(1) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}+X=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}$

(2) $2\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}-3X+\begin{bmatrix}-2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}=0$

解 (1) $X=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -2 & -2\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}$

(2) $3X=2\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -3 & 3\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}$

$X=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & -3 & 3\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4/3 & -1 & 1\\ -1/3 & 1/3 & 1\end{bmatrix}$

2.8 求矩阵 X，使得

$$2X+\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

答 $X=\begin{bmatrix}-5/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}$

2.9 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times p}$，$C=(c_{ij})_{n\times p}$，试证 $A(B+C)=AB+AC$。

证 矩阵 A 的第 i 行的元素为 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$。矩阵 $B+C$ 的第 j 列的元素为

$b_{1j}+c_{1j}, b_{2j}+c_{2j}, \cdots, b_{nj}+c_{nj}$。$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ 的第 i 行第 j 列的元素为 $a_{i1}(b_{1j}+c_{1j})+a_{i2}(b_{2j}+c_{2j})+\cdots+a_{in}(b_{nj}+c_{nj})=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}$。这两项正是矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{AC}$ 的第 i 行第 j 列的元素。

2.10　对于两个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，求使得 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 成立的条件。

答　$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可交换的，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。

2.11　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p}, \boldsymbol{C}=(c_{ij})_{p\times q}$，试证 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$。

证　$\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的元素为 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$，$\boldsymbol{BC}$ 的第 j 列的元素为 $\sum_{h=1}^{p}b_{1h}c_{hj}, \sum_{h=1}^{p}b_{2h}c_{hj}, \cdots, \sum_{h=1}^{p}b_{nh}c_{hj}$。因此，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 的第 i 行第 j 列的元素为

$$
\begin{aligned}
& a_{i1}\sum_{h=1}^{p}b_{1h}c_{hj}+a_{i2}\sum_{h=1}^{p}b_{2h}c_{hj}+\cdots+a_{in}\sum_{h=1}^{p}b_{nh}c_{hj} \\
&= \sum_{k=1}^{n}a_{ik}\left(\sum_{h=1}^{p}b_{kh}c_{hj}\right)=\sum_{h=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kh}\right)C_{hj} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{k1}\right)c_{1j}+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{k2}\right)c_{2j}+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kp}\right)c_{pj}
\end{aligned}
$$

等式表明，这就是 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列的元素，所以，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$。

2.12　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times p$ 矩阵，C 为 $r\times q$ 矩阵。问：p,q,r 应满足什么条件才能进行下列运算？运算结果的阶次是多少？(1) $\boldsymbol{ABC}$；(2) $\boldsymbol{ACB}$；(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$。

答　(1) $p=r, m\times q$；(2) $r=n=q, m\times p$；(3) $r=n, p=q, m\times q$。

2.13　试证方阵可惟一地表示为对称矩阵与反对称矩阵之和。

证　设 $\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}), \boldsymbol{C}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} &= \left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\right]^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \\
&= \frac{1}{2}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}]=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{B} \\
\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} &= \left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\right]^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \\
&= \frac{1}{2}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}]=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{C}
\end{aligned}
$$

即，$\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是反对称矩阵，所以，方阵 $\boldsymbol{A}$ 可表示成对称矩阵与反对称矩阵之和。

再则，设 $\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{C}_1$，并令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{C}_1$，则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{C}_1)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{C}_1$$

故有

$$A+A^{\mathrm{T}}=2B_1,\quad A-A^{\mathrm{T}}=2C_1$$

即

$$B_1=\frac{A+A^{\mathrm{T}}}{2}=B,\quad C_1=\frac{A-A^{\mathrm{T}}}{2}=C$$

2.14 将 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&0&1\\-2&2&3\end{pmatrix}$ 表示为对称矩阵与反对称矩阵之和。

答 $A=\begin{pmatrix}1&5/2&-3/2\\5/2&0&3/2\\-3/2&3/2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1/2&1/2\\1/2&0&-1/2\\-1/2&1/2&0\end{pmatrix}$

2.15 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的列矢量为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，试用 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 表示 $A^{\mathrm{T}}A$。

解 由于 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$a_i=\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ni}\end{pmatrix}$，所以

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\quad a_i^{\mathrm{T}}=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})$$

从而

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_1^{\mathrm{T}}\\a_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\a_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

根据乘法规则，有

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}a_1^{\mathrm{T}}\\a_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\a_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{pmatrix}a_1^{\mathrm{T}}a_1&a_1^{\mathrm{T}}a_2&\cdots&a_1^{\mathrm{T}}a_n\\a_2^{\mathrm{T}}a_1&a_2^{\mathrm{T}}a_2&\cdots&a_2^{\mathrm{T}}a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n^{\mathrm{T}}a_1&a_n^{\mathrm{T}}a_2&\cdots&a_n^{\mathrm{T}}a_n\end{pmatrix}$$

2.16 设 n 阶矩阵 A 的行矢量为 $a^{(1)},a^{(2)},\cdots,a^{(n)}$，试用 $a^{(1)},a^{(2)},\cdots,a^{(n)}$ 表示 $A^{\mathrm{T}}A=I$ 成立的条件。

答 $a^{(i)\mathrm{T}}a^{(j)}=\delta_{ij}$，即 $a^{(i)\mathrm{T}}a^{(j)}=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq 0\end{cases}$。

2.17　$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵时，试证 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ 为对称矩阵，$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 为反对称矩阵。

证　因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$。

$$(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$$

可见，$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ 是对称矩阵。

$$(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}=-(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})$$

可见，$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 是反对称矩阵。

2.18　$\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为反对称矩阵，求 $\boldsymbol{AB}$ 为反对称矩阵的条件。

答　$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换是 $\boldsymbol{AB}$ 为反对称矩阵的必要与充分条件。

2.19　$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，定义矩阵的迹 $\mathrm{tr}A=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$，求证 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}+\mathrm{tr}\boldsymbol{B}$。

证　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})$，从而

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}+\mathrm{tr}\boldsymbol{B}$$

2.21　如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}$，试证 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是幂等矩阵（即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$）。

证

$$\boldsymbol{ABA}=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}=\boldsymbol{A}^2$$

又

$$\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$$

所以，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$。用 $\boldsymbol{BAB}$ 可证 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$。

2.23　试证 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{pmatrix}$ 为三阶幂零矩阵（即 $\boldsymbol{A}^3=0$）。

证　$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\3&3&9\\-1&-1&3\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\3&3&9\\-1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

2.24　若 $\boldsymbol{A}$ 为二阶幂零矩阵，试证 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}\pm\boldsymbol{A})^n=\boldsymbol{A}$，$n$ 为任意正整数。

提示　$\boldsymbol{A}^n=0(n>1)$。

2.26　若 $\boldsymbol{A}$ 为有逆阵的 n 阶方阵，试证：(1) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$；(2) $(\bar{\boldsymbol{A}})^{-1}=\overline{\boldsymbol{A}^{-1}}$；(3) $(\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}})^{-1}=\overline{(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}}$。

提示　由 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I}$ 的转置，得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的逆阵为 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$。

2.27　计算 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&1\\3&3&4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

解　$\det\boldsymbol{A}=2$

$$\text{adj}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&1&2\\7&-5&-4\\-3&3&2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\text{adj}\boldsymbol{A}}{\det\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}-3/2&1/2&1\\7/2&-5/2&-2\\-3/2&3/2&1\end{bmatrix}$$

2.28 计算下述矩阵的逆矩阵。

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&1&2\\2&-1&1\end{bmatrix}$；(2) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&3&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{bmatrix}$。

答 (1) $\frac{1}{14}\begin{bmatrix}3&-1&5\\5&3&-1\\-1&5&3\end{bmatrix}$；(2) $\begin{bmatrix}1&-2/3&0&0\\0&1/3&0&0\\0&0&1/2&-1/6\\0&0&0&1/3\end{bmatrix}$。

2.29 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是可交换的非奇异矩阵，试证下述矩阵是可交换的。(1)$\boldsymbol{A}^{-1}$与$\boldsymbol{B}$；(2) $\boldsymbol{A}^{-1}$与$\boldsymbol{B}^{-1}$。

证 (1) 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{A}^{-1}$

$$(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{BA}^{-1})=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{AA}^{-1})$$

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{BA}^{-1})=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{I}$$

所以

$$\boldsymbol{BA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$$

(2) $\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{BA}^{-1})\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}$

$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1})=(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{BB}^{-1})$

$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1})=(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{I}$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

2.30 若$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是非奇异对称矩阵，且可交换，试证 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AB}^{-1}$，与$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$是对称的。

提示 $(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{BA}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$。

2.31 试证当且仅当$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对合矩阵(即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$)。

证 设 $\boldsymbol{A}$ 是对合矩阵，即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$，则

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2=0$$

再设

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2=0$$

显然

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$$

2.33　若 $\boldsymbol{A}$ 为方阵,试证:(1)$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是对称的;(2) $\boldsymbol{A}+\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$,$\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是埃尔米特矩阵。

证　(1) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$

(2) 埃尔米特矩阵的定义是$(\bar{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$

$$(\overline{\boldsymbol{A}+\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}})^{\mathrm{T}} = (\bar{\boldsymbol{A}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}+\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$$

$$(\overline{\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}})^{\mathrm{T}} = (\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$$

$$(\overline{\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}} = \bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$$

2.35　若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,试证 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是对称的。

证　证法一

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}$$

证法二

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元素是 a_{ij},矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 相应行列的元素为 a_{ji},而 $b_{ij} = a_{ij}+a_{ji}$。$\boldsymbol{A}$ 的第 j 行第 i 列的元素为 a_{ji},$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 相应行列的元素为 a_{ij},而 $b_{ji}=a_{ji}+a_{ij}$,故 $b_{ij}=b_{ji}$,$\boldsymbol{B}$ 是对称的。

2.37　试证:若 m 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称的(反对称的),$\boldsymbol{P}$ 是 $m\times n$ 矩阵,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 是对称的(反对称的)。

证　如果 $\boldsymbol{A}$ 是对称的,则

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 是对称的。

如果 $\boldsymbol{A}$ 是反对称的,则

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{B}$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 是反对称的。

2.39　试证 $\boldsymbol{P}$ 为非奇异矩阵时,$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的本征多项式相同。

证　$\det(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}-\lambda\boldsymbol{I}) = \det(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}-\lambda\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P})$

$= \det[\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}] = \det\boldsymbol{P}^{-1}\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\det\boldsymbol{P}$

$= \det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})$

所以,$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的本征多项式相同。

2.41　用正交矩阵将 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 化为对角矩阵。

解 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(4-\lambda)=0$

故本征值为 1 与 4。

求本征矢量。

当 $\lambda=1$ 时，由

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

得基本解

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

当 $\lambda=4$ 时，由

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0\\ x_1-2x_2+x_3=0\\ x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$$

得基本解

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，所以，对于相异本征值的本征矢量正交。因此，对 $\lambda=1$ 的本征矢量正规正交化，对于 $\lambda=4$ 的本征矢量，如果取大小为 1 的那个时，就作出由三个本征矢量组成的正规正交系。

设 $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ 及 $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，用施密特正交化法，则有

$$\boldsymbol{p}_2=\frac{\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}_1|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1\quad\boldsymbol{p}_2\quad\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\text{是正交矩阵}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

2.42 设 $A=\begin{pmatrix}7&-2&1\\-2&10&-2\\1&-2&7\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$，$\lambda_i$ 是 A 的本征值，求正交矩阵 P。

答 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$。

2.43 求下列矩阵的本征值与本征矢量。

(1) $\begin{bmatrix}-1&2\\3&0\end{bmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&0&0\\4&0&-2\end{pmatrix}$。

答 (1) 本征值是 2，−3。与此对应的本征矢量是 $C_1\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}$，$C_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$。

(2) 本征值是 0，0，−4。与此对应的本征矢量是 $C_1\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}$，$C_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$C_3\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1\end{pmatrix}$。

2.44 求下列矩阵的本征值与本征矢量。

(1) $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$。

答 (1) 本征值是 0，6。与 0 相对应的本征矢量是 $C_1\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$，$C_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$；与 6 相对应的本征矢量是 $C_3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$。

(2) 本征值是 2，1，−2。与此对应的本征矢量是 $C_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$C_2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$C_3\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$。

2.45 若 n 阶方阵 A 有 n 个线性无关的不变矢量，试证 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,$

$\lambda_2,\cdots,\lambda_n$)，$\lambda_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的本征值。

证　设对应于本征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的 n 个线性无关的不变矢量为 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$，于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i=\lambda_i\boldsymbol{X}_i(i=1,2,\cdots,n)$。设 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AP}&=(\boldsymbol{AX}_1,\boldsymbol{AX}_2,\cdots,\boldsymbol{AX}_n)=(\lambda_1\boldsymbol{X}_1,\lambda_2\boldsymbol{X}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{X}_n)\\&=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}\\&=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

2.46　将 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}$ 化为对角矩阵。

答　$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-2&1\\1&2&-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

2.47　设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，试证

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=-\lambda^3+\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\lambda^2-\mathrm{tr}(\mathrm{adj}\boldsymbol{A})\lambda+\det\boldsymbol{A}$$

证　三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的本征方程可写为

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})&=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)\\&=-\lambda^3+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2-(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)\lambda+\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0\end{aligned}$$

式中，$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$，　$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\det\boldsymbol{A}$。

$$\begin{pmatrix}a_{11}-\lambda&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}-\lambda&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}-\lambda\end{pmatrix}$$

中含 λ 项的系数是

$$-(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$$

而 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\mathrm{adj}\boldsymbol{A}$ 的迹是

$$\mathrm{tr}(\mathrm{adj}\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$$

所以

$$\mathrm{tr}(\mathrm{adj}\boldsymbol{A})=\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2$$

2.49　试证：$\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵，若 λ 为本征值，则 $-\lambda$ 也是本征值。

证　设 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$，由于 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，因而 $0=\det(-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\lambda\boldsymbol{I})=\det[(-1)(\boldsymbol{A}+$

$\lambda \boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}]=(-1)^{n}\det[\boldsymbol{A}-(-\lambda)\boldsymbol{I}]$。所以，$-\lambda$ 也是本征值。

2.50　试证：$\boldsymbol{A}$ 为三阶正交矩阵，且 $\det\boldsymbol{A}=1$ 时，具有本征值 1；其次，如果 -1 是本征值，则 -1 是本征方程的重根。

提示　先证 $\mathrm{tr}(\mathrm{adj}\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$，再利用题 2.47 的结果。

2.51　试证方阵 $\boldsymbol{A}$ 可惟一地表示为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\mathrm{i}\boldsymbol{C}$（$\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为埃尔米特矩阵）。再将 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+\mathrm{i} & \mathrm{i}\\ 2 & 3-\mathrm{i}\end{bmatrix}$表示成 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\mathrm{i}\boldsymbol{C}$ 的形式。

证　由题意有 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是埃尔米特矩阵。若写成 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\mathrm{i}\boldsymbol{C}$ 时，则 $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=(\overline{\boldsymbol{B}+\mathrm{i}\boldsymbol{C}})^{\mathrm{T}}=\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}-\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}}$。

由于 $\boldsymbol{B}=\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{C}=\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}}$，所以 $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}+\mathrm{i}\boldsymbol{C}$。从而必有 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\boldsymbol{A}+\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}}{2},\boldsymbol{C}=\dfrac{\boldsymbol{A}-\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}}{2\mathrm{i}}$，亦即若存在就惟一确定。

其次，$\left[\overline{\dfrac{\boldsymbol{A}+\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}}{2}}\right]^{\mathrm{T}}=\dfrac{\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}+(\overline{\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}})^{\mathrm{T}}}{2}=\dfrac{\boldsymbol{A}+\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}}{2}$

$$\left[\overline{\frac{\boldsymbol{A}-\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}}{2\mathrm{i}}}\right]^{\mathrm{T}}=\left[\overline{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{A}-\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}})}\right]^{\mathrm{T}}=\frac{\mathrm{i}}{2}(\overline{\boldsymbol{A}-\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}})^{\mathrm{T}}$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{2}\{\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}-\overline{(\overline{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}}^{\mathrm{T}}\}=-\frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{A}-\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}})=\frac{\boldsymbol{A}-\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}}{2\mathrm{i}}$$

所以，都是埃尔米特矩阵，且

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{A}+\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}}{2}+\mathrm{i}\,\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2\mathrm{i}}$$

由此计算

$$\begin{pmatrix}1+\mathrm{i} & \mathrm{i}\\ 2 & 3-\mathrm{i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\\ 1-\dfrac{\mathrm{i}}{2} & 3\end{pmatrix}+\mathrm{i}\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\\ \dfrac{1}{2}-\mathrm{i} & -1\end{pmatrix}$$

2.52　对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 以及非零的 n 维行矢量 $\boldsymbol{x}$，试证满足 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{x}$ 的数 λ 不外是 $\boldsymbol{A}$ 的本征值，称矢量 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的左本征矢量；而满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 的 $\boldsymbol{x}$ 叫做右本征矢量。只说本征矢量时，指的是右本征矢量。

证　由于 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{x}$，因而 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}$。转置得 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$。因为 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，所以

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}=\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$$

从而，λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的本征值。

2.53　试证：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为奇异阵时，$\boldsymbol{A}$ 具有本征值 0；反之，若 $\boldsymbol{A}$ 具有本征值 0，则 $\boldsymbol{A}$ 是奇异阵。

证　设 $\det\boldsymbol{A}=0$，对于本征方程 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$，令 $\lambda=0$，由于满足 $\det(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{I})=$

$\det\boldsymbol{A}=0$，所以，$\lambda=0$ 是本征值。反之，设 $\lambda=0$ 是本征值，则 $\det(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{I})=\det\boldsymbol{A}=0$。

2.54　试证：$\boldsymbol{A}$ 为非奇异阵时，$\boldsymbol{A}$ 的本征矢量是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的本征矢量。$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的本征值是什么？

证　若 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵，则由题 2.53 知不具有 $\lambda=0$ 的本征值。设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的本征值，$\boldsymbol{x}$ 为本征矢量时，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$。从而得到 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=\lambda^{-1}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}$ 是对应于本征值 λ^{-1} 的本征矢量。对于 $\boldsymbol{A}$ 的本征值 λ，λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的本征值；反之，对应于 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的本征值 μ，μ^{-1} 为 $\boldsymbol{A}$ 的本征值。因此，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的本征值与 $\boldsymbol{A}$ 的本征值的倒数相一致。

2.55　证明与 $\boldsymbol{A}$ 的本征值中相异的本征值所对应的本征矢量是线性无关的。

证　设与 $\boldsymbol{A}$ 的本征值中相异的本征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 所对应的本征矢量为 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$。要证明的是矢量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。

设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1}(k+1\leqslant m)$ 线性相关，则惟一地可表示为

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{x}_k$$

由于

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{A}(c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{x}_k)$$

因而

$$\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}=c_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+c_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k$$

但

$$\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}=\lambda_{k+1}(c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{x}_k)$$

所以

$$c_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+c_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k=c_1\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_1+c_2\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_k\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_k$$

故有

$$(c_1\lambda_1-c_1\lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_1+(c_2\lambda_2-c_2\lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_2+\cdots+(c_k\lambda_k-c_k\lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{0}$$

由于 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ 是线性无关的，所以

$$c_1(\lambda_1-\lambda_{k+1})=c_2(\lambda_2-\lambda_{k+1})=\cdots=c_k(\lambda_k-\lambda_{k+1})=0$$

因为 $\lambda_i-\lambda_{k+1}\neq0(i=1,2,\cdots,k)$，所以 $c_1=c_2=\cdots=c_k=0$。这与 $\boldsymbol{x}_{k+1}\neq\boldsymbol{0}$ 相矛盾，因此 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。

2.57　求矩阵 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & 2c\end{bmatrix}$ 是正交矩阵的条件。

解　首先 a,b,c 必须是实数。因正交条件是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$（列矢量是正规正交系的条件），因而，由

$$\begin{bmatrix}a & c\\ b & 2c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & 2c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+c^2 & ab+2c^2\\ ab+2c^2 & b^2+4c^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

得

$$\begin{cases}a^2+c^2=1 & \text{(a)}\\ b^2+4c^2=1 & \text{(b)}\\ ab+2c^2=0 & \text{(c)}\end{cases}$$

(a)－(b)得

$$a^2-b^2-3c^2=0 \tag{d}$$

由式(c)得

$$c^2=-\frac{ab}{2}$$

代入式(d)中，整理后得

$$(2a-b)(a+2b)=0$$

从而有 $2a=b$ 或 $a=-2b$。

将 $2a=b$ 代入(c)，得 $2a^2+2c^2=0$，于是 $a=c=b=0$，产生矛盾。将 $a=-2b$ 代入式(c)得

$$-2b^2+2c^2=0$$

由此可见，$c=b$ 或 $c=-b$。于是得到如下结果：

$$a=\pm\frac{2}{\sqrt{5}},\quad b=\mp\frac{1}{\sqrt{5}},\quad c=\mp\frac{1}{\sqrt{5}}$$

或

$$a=\pm\frac{2}{\sqrt{5}},\quad b=\mp\frac{1}{\sqrt{5}},\quad c=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

2.58　由矢量 $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$，作出正规正交系。

答　$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$。

2.59　求与矢量 $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\\mathrm{i}\end{pmatrix}$都正交，且大小为1的矢量。

解　设所求的矢量为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，条件是 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}_1=0$，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}_2=0$，$\det\boldsymbol{x}=1$。

用分量形式表示，则有

$$\begin{cases}\mathrm{i}x_1+2x_2-x_3=0 & \text{(a)}\\ x_1+2x_2+\mathrm{i}x_3=0 & \text{(b)}\\ x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2+x_2\bar{x}_3=1 & \text{(c)}\end{cases}$$

(b)－(a)得

$$(1-\mathrm{i})x_1+(1+\mathrm{i})x_3=0,\quad x_1=\mathrm{i}x_3$$

(a)－i(b)得

$$(2-2\mathrm{i})x_2=0,\quad x_2=0$$

由式(c)得

$$(\mathrm{i}x_3)(\overline{\mathrm{i}x_3})+x_3\bar{x}_3=1\text{，即 }2x_3\bar{x}_3=1$$

$$x_3\bar{x}_3=|x_3|^2$$

所以

$$|x_3|=1/\sqrt{2}$$

令 $x_3=c$，所求矢量为 $c\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\0\\1\end{pmatrix}$（其中 $|c|=1/\sqrt{2}$）。

2.60 求与矢量 $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1+\mathrm{i}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ 都正交，且大小为 1 的矢量。

答 $c\begin{pmatrix}\mathrm{i}/3\\1-\dfrac{2}{3}\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}$ $\left(\text{其中 }|c|=\dfrac{3}{\sqrt{23}}\right)$。

2.61 用适当的酉矩阵使矩阵 $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 成为对角矩阵。

解

$$\det\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)^2(1-\lambda)-(1-\lambda)$$

$$=(1-\lambda)(\lambda^2-1)=0$$

得到本征值 $-1,1,1$。

对应于 $\lambda=-1$ 的本征矢量：由于

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

因而

$$\begin{cases}x_3=-x_1\\x_2=-x_2\\x_1=-x_3\end{cases}$$

令 $x_3=c$ 的本征矢量为

$$\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

对应于 $\lambda=1$ 的本征矢量：由于

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

因而

$$\begin{cases}x_3=x_1\\x_2=x_2\\x_1=x_3\end{cases}$$

令 $x_2=c_1, x_3=c_2$，得本征矢量为

$$\boldsymbol{c}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad 和 \quad \boldsymbol{c}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

由于矢量 $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{c}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{c}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 互相正交，除以各个矢量自己的长度，得

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

设

$$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{p}_1,\quad \boldsymbol{p}_2,\quad \boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\0&1&0\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{U}^{-1}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

2.62 用适当的酉矩阵使矩阵 $\begin{pmatrix}1&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&1\end{pmatrix}$ 成为对角矩阵。

答 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{p}_1,\quad \boldsymbol{p}_2)=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}&-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{U}^{-1}\begin{pmatrix}1&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{pmatrix}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$$

2.63 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}^n$（n 为正整数）。

解 $\det\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-4=(\lambda-3)(\lambda+1)=0$ 得本征值 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=-1$。对应的本征矢量为 $\boldsymbol{c}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{c}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$。各自对应的单位矢量为 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$。作矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)$，$\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\boldsymbol{D}$。

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DP},\quad \boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DP})(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DP})\cdots(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DP})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^n\boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{A}^n=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3^n+(-1)^n & 3^n-(-1)^n\\ 3^n-(-1)^n & 3^n+(-1)^n\end{bmatrix}$$

2.64 计算：(1) $\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}^n$；(2) $\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}^n$。

答 (1) $\begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{bmatrix}$；(2) $\begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{bmatrix}$。

2.65 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$，用凯莱-哈密顿定理求 $\boldsymbol{A}^3,\boldsymbol{A}^4$。设 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵，求 $\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^{-2}$。

解 本征方程

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -2\\ -3 & \lambda-1 & -1\\ -2 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-3\lambda^2-7\lambda-11=0$$

根据凯莱-哈密顿定理有

$$\boldsymbol{A}^3=3\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}+11\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}42 & 31 & 29\\ 45 & 39 & 31\\ 53 & 45 & 42\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^4=3\boldsymbol{A}^3+7\boldsymbol{A}^2+11\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}193 & 160 & 144\\ 224 & 177 & 160\\ 272 & 224 & 193\end{bmatrix}$$

由 $11\boldsymbol{I}=-7\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^3$，有

$$A^{-1}=\frac{1}{11}(-7I-3A+A^2)=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-2 & 5 & -1\\ -1 & -3 & 5\\ 7 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$A^{-2}=\frac{1}{11}(-7A^{-1}-3I+A)=\frac{1}{121}\begin{pmatrix}-8 & -24 & 29\\ 40 & 1 & -24\\ -27 & 40 & -8\end{pmatrix}$$

第 3 章　张量概念

3.1　用求和约定改写下列各式：

(1) $\mathrm{d}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1+\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial x^N}\mathrm{d}x^N$

(2) $\frac{\mathrm{d}\bar{x}^k}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^1}\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^2}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}+\cdots+\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^N}\frac{\mathrm{d}x^N}{\mathrm{d}t}$

(3) $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+\cdots+(x^N)^2$

(4) $\mathrm{d}s^2=g_{11}(\mathrm{d}x^1)^2+g_{22}(\mathrm{d}x^2)^2+g_{33}(\mathrm{d}x^3)^2$

(5) $\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}g_{pq}\mathrm{d}x^p\mathrm{d}x^q$

解　(1) $\mathrm{d}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$；(2) $\frac{\mathrm{d}\bar{x}^k}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$；(3) x^kx^k；(4) $\mathrm{d}s^2=g_{pp}\mathrm{d}x^p\mathrm{d}x^p(N=3)$；(5) $g_{pq}\mathrm{d}x^p\mathrm{d}x^q(N=3)$。

3.2　用求和约定改写下列各式：

(1) $a_1x^1x^3+a_2x^2x^3+\cdots+a_Nx^Nx^3$

(2) $A^{21}B_1+A^{22}B_2+A^{23}B_3+\cdots+A^{2N}B_N$

(3) $A^j_1B^1+A^j_2B^2+A^j_3B^3+\cdots+A^j_NB^N$

(4) $g^{21}g_{11}+g^{22}g_{21}+g^{23}g_{31}+g^{24}g_{41}$

(5) $B^{121}_{11}+B^{122}_{12}+B^{221}_{21}+B^{222}_{22}$

答　(1) $a_ix^ix^3$；(2) $A^{2k}B_k$；(3) $A^j_kB^k$；(4) $g^{2k}g_{k1}$；(5) $B^{j2k}_{jk}(N=2)$。

3.3　将下列用求和约定写成的表示式改写为多项求和的表示式：

(1) $a_{jk}x^k$；(2) $A_{pq}A^{qr}$；(3) $\bar{g}_{rs}=g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^s}, N=3$。

解　(1) $a_{jk}x^k=a_{j1}x^1+a_{j2}x^2+\cdots+a_{jN}x^N$

(2) $A_{pq}A^{qr}=A_{p1}A^{1r}+A_{p2}A^{2r}+\cdots+A_{pN}A^{Nr}$

(3) $\bar{g}_{rs}=g_{11}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s}+g_{21}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s}+g_{31}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s}$

$$+g_{12}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s}+g_{22}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s}+g_{32}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s}$$

$$+g_{13}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s}+g_{23}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s}+g_{33}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s}$$

3.5 在直角坐标 $x^k,k=1,2,\cdots,N$ 中,下列方程当 $N=2,3$ 或 $N\geqslant 4$ 时各表示什么轨迹?必要时,假设这些函数是单值、连续可导、独立的。

(1) $a_kx^k=1$,式中 k 为常量;(2) $x^kx^k=1$;(3) $x^k=x^k(u)$;(4) $x^k=x^k(u,v)$。

解 (1) $a_kx^k=1$,式中 k 为常量

当 $N=2$ 时,$a_1x^1+a_2x^2=1$,表示平面上的一条直线;

当 $N=3$ 时,$a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3=1$,表示三维空间中的一个平面;

当 $N\geqslant 4$ 时,$a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_Nx^N=1$,表示超平面。

(2) $x^kx^k=1$

当 $N=2$ 时,$(x^1)^2+(x^2)^2=1$,表示平面上半径为1的圆;

当 $N=3$ 时,$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=1$,表示半径为1的球面;

当 $N\geqslant 4$ 时,$(x^1)^2+(x^2)^2+\cdots+(x^N)^2=1$,表示半径为1的超球面。

(3) $x^k=x^k(u)$

当 $N=2$ 时,$x^1=x^1(u),x^2=x^2(u)$,表示含参变量的平面曲线;

当 $N=3$ 时,$x^1=x^1(u),x^2=x^2(u),x^3=x^3(u)$,表示三维空间曲线;

当 $N\geqslant 4$ 时,表示 N 维空间曲线。

(4) $x^k=x^k(u,v)$

当 $N=2$ 时,$x^1=x^1(u,v),x^2=x^2(u,v)$,表示从 (u,v) 到 (x^1,x^2) 的坐标变换;

当 $N=3$ 时,$x^1=x^1(u,v),x^2=r^2(u,v),x^3=x^3(u,v)$,表示含参变量 u,v 的三维曲面;

当 $N\geqslant 4$ 时,表示超曲面。

3.6 当 $N=2,3$ 或4时,方程 $a_kx^kx^k=1$ 表示什么轨迹?式中 $x^k,k=1,2,\cdots,N$ 是直角坐标,a_k 是非负常数。

答 $N=2$ 时是椭圆,$N=3$ 时是椭球,$N=4$ 时是超椭球。

3.7 在三维空间里,求下列含克罗内克符号 δ_{ij} 表示式的值。

(1) $\delta_{ij}\delta_{ij}$;(2) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}$。

解 (1) $\delta_{ij}\delta_{ij}=\delta_{1j}\delta_{1j}+\delta_{2j}\delta_{2j}+\delta_{3j}\delta_{3j}=3$

(2) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}=\delta_{1j}\delta_{1k}\delta_{jk}+\delta_{2j}\delta_{2k}\delta_{jk}+\delta_{3j}\delta_{3k}\delta_{jk}=3$

或

$$\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}=\delta_{ik}\delta_{ik}=3$$

3.8　在三维空间里，求下列含克罗内克符号 δ_{ij} 表示式的值。

(1) $\delta_{ij}\delta_{jk}$；(2) $\delta_{ij}\delta_{ik}$。

答　(1) δ_{ik}；(2) δ_{jk}。

3.9　计算：(1) $\delta^p_q A^{qr}_s$；(2) $\delta^p_q \delta^q_r$。

解　因为 $\delta^p_q = \begin{cases} 1, & p=q \\ 0, & p\neq q \end{cases}$，所以

$$\delta^p_q A^{qr}_p = A^{pr}_s, \quad \delta^p_q \delta^p_r = \delta^p_r$$

3.10　计算：(1) $\delta^p_q B^{rs}_p$；(2) $\delta^p_q \delta^r_s A^{qs}$；(3) $\delta^p_q \delta^q_r \delta^r_s$。

答　(1) B^{rs}_q；(2) A^{pr}；(3) δ^p_s。

3.11　试证：在三维空间里，$\in_{ijk}\in_{kij}=6$。

证　(1) 关于 i，不为零的项有 $\in_{ijk}\in_{kij}=\in_{1jk}\in_{k1j}+\in_{2jk}\in_{k2j}+\in_{3jk}\in_{k3j}$。

(2) 关于 j，不为零的项有

$$\begin{aligned}\in_{ijk}\in_{kij} &= \in_{12k}\in_{k12}+\in_{13k}\in_{k13}+\in_{21k}\in_{k21} \\ &\quad +\in_{23k}\in_{k23}+\in_{31k}\in_{k31}+\in_{32k}\in_{k32}\end{aligned}$$

(3) 关于 k，不为零的项有

$$\begin{aligned}\in_{ijk}\in_{kij} &= \in_{123}\in_{312}+\in_{132}\in_{213}+\in_{213}\in_{321}+\in_{231}\in_{123} \\ &\quad +\in_{312}\in_{231}+\in_{321}\in_{132} \\ &= (1)(1)+(-1)(-1)+(-1)(-1)+(1)(1) \\ &\quad +(-1)(-1)+(-1)(-1) \\ &= 6\end{aligned}$$

3.13　试证

$$\in_{pqs}\in_{mnr} = \begin{vmatrix} \delta_{mp} & \delta_{mq} & \delta_{ms} \\ \delta_{np} & \delta_{nq} & \delta_{ns} \\ \delta_{rp} & \delta_{rq} & \delta_{rs} \end{vmatrix}$$

证　设 A_{ij} 的行列式为

$$\det\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

行与行、列与列每交换一次，行列式就变号一次，所以任意换行后有

$$\begin{vmatrix} A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} \\ A_{r1} & A_{r2} & A_{r3} \end{vmatrix} = \in_{mnr}\det\boldsymbol{A}$$

任意换列后有

$$\begin{vmatrix} A_{1p} & A_{1q} & A_{1s} \\ A_{2p} & A_{2q} & A_{2s} \\ A_{3p} & A_{3q} & A_{3s} \end{vmatrix} = \in_{pqs} \det \boldsymbol{A}$$

因此，任意地将行与行交换，列与列交换后有

$$\begin{vmatrix} A_{mp} & A_{mq} & A_{ms} \\ A_{np} & A_{nq} & A_{ns} \\ A_{rp} & A_{rq} & A_{rs} \end{vmatrix} = \in_{mnr} \in_{pqs} \det \boldsymbol{A}$$

令 $A_{ij}=\delta_{ij}$，则 $\det\boldsymbol{A}=1$，因此有

$$\begin{vmatrix} \delta_{mp} & \delta_{mq} & \delta_{ms} \\ \delta_{np} & \delta_{nq} & \delta_{ns} \\ \delta_{rp} & \delta_{rq} & \delta_{rs} \end{vmatrix} = \in_{pqs} \in_{mnr}$$

3.15　试证 $\in_{pqs}\in_{snr}=\delta_{pn}\delta_{qr}-\delta_{pr}\delta_{qn}$。

证　将 3.13 题结论中的行列式展开，得

$$\begin{aligned} \in_{pqs} \in_{mnr} = {} & \delta_{mp}(\delta_{nq}\delta_{rs} - \delta_{ns}\delta_{rq}) + \delta_{mq}(\delta_{ns}\delta_{rp} \\ & - \delta_{np}\delta_{rs}) + \delta_{ms}(\delta_{np}\delta_{rq} - \delta_{nq}\delta_{rp}) \end{aligned}$$

用 s 代替 m，则有

$$\begin{aligned} \in_{pqs} \in_{snr} &= \delta_{sp}(\delta_{nq}\delta_{rs} - \delta_{ns}\delta_{rq}) + \delta_{sq}(\delta_{ns}\delta_{rp} - \delta_{np}\delta_{rs}) + \delta_{ss}(\delta_{np}\delta_{rq} - \delta_{nq}\delta_{rp}) \\ &= \delta_{nq}\delta_{rp} - \delta_{np}\delta_{rq} + \delta_{nq}\delta_{rp} - \delta_{np}\delta_{rq} + 3(\delta_{np}\delta_{rq} - \delta_{nq}\delta_{rp}) \\ &= \delta_{np}\delta_{rq} - \delta_{nq}\delta_{rp} = \delta_{pn}\delta_{qr} - \delta_{pr}\delta_{qn} \end{aligned}$$

3.17　用下标表示法证明：若 $\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}$，$\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$，则有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$。

证　设 $\boldsymbol{X}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$，则

$$X_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\in_{ijk} u_j v_k) = \in_{ijk} \dot{u}_j v_k + \in_{ijk} u_j \dot{v}_k$$

因为 $\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}$，$\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$，所以

$$\dot{u}_j = \in_{jpq}\omega_p u_q,\quad \dot{v}_k = \in_{kmn}\omega_m v_n$$

代入上式得

$$\begin{aligned} X_i &= \in_{ijk} \in_{jpq}\omega_p u_q v_k + \in_{ijk} \in_{kmn}\omega_m u_j v_n \\ &= (\in_{ijk} \in_{kmn} - \in_{ink} \in_{kmj})\omega_m u_j v_n \\ &= (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{nj} + \delta_{ij}\delta_{nm})\omega_m u_j v_n \\ &= (\delta_{ij}\delta_{nm} - \delta_{in}\delta_{jm})\omega_m u_j v_n \end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{X} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$$

3.19　证明$\dfrac{\partial x^p}{\partial x^q}=\delta_q^p$。

证　若 $p=q$，因为 $x^p=x^q$，$\dfrac{\partial x^p}{\partial x^q}=1$；若 $p\neq q$，$\dfrac{\partial x^p}{\partial x^q}=0$，因为 x^p 与 x^q 互不相关。所以

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^q}=\delta_q^p$$

3.21　写出下列张量的变换律：(1) $A^i{}_{\cdot jk}$；(2) $B^{mn}{}_{\cdot\cdot ijk}$；(3) C^m。

解　(1) $\bar{A}^p{}_{\cdot qr}=\dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i}\dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}\dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r}A^i{}_{\cdot jk}$

(2) $\bar{B}^{pq}{}_{\cdot\cdot rst}=\dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^m}\dfrac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^n}\dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^r}\dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^s}\dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^t}B^{mn}{}_{\cdot\cdot ijk}$

(3) $\bar{C}^p=\dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^m}C^m$

3.23　$A(j,k,l,m)$是坐标 x^i 的函数，它从坐标系 x^i 变换到坐标系 $\bar{x}^i$ 时符合以下的变换律：

$$\bar{A}(p,q,r,s)=\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^k}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^l}\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^m}A(j,k,l,m)$$

试问 $A(j,k,l,m)$是不是张量？如是张量，写出张量的上、下指标，并说明其逆变与协变的阶数。

解　$\bar{A}^{qrs}_{\cdots p}=\dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\dfrac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^k}\dfrac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^l}\dfrac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^m}A_j^{klm}$

所以它是三阶逆变、一阶协变的四阶张量。

3.24　设 $\bar{B}(p,q,r)=\dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p}\dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^q}\dfrac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m}B(j,k,m)$，$\bar{C}(p,q,r,s)=\dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j}\dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\dfrac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r}\dfrac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^n}C(j,k,m,n)$。问：哪一个是张量？写出张量的上、下指标，并说明其逆变与协变的协数。

答　只有 $B^m{}_{\cdot jk}$是一阶逆变、二阶协变的三阶张量。

3.25　设一张量在笛卡儿直角坐标系里的协变分量为 $2x-z,x^2y,yz$。试求该张量在柱面坐标系 ρ,φ,z 的协变分量。

解　设 A_j 表示张量在笛卡儿直角坐标系 $x^1=x,x^2=y,x^3=z$ 中的协变分量，则

$$A_1=2x^1-x^3,\quad A_2=(x^1)^2x^2,\quad A_3=x^2x^3$$

令 $\bar{A}_k$ 表示张量在柱面坐标系 $\bar{x}^1=\rho,\bar{x}^2=\theta,\bar{x}^3=z$ 中的协变分量，由于协变张量的变换律是

$$\overline{A}_k = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^k} A_j \tag{a}$$

而两组坐标系之间的关系是

$$x^1 = \overline{x}^1 \cos\overline{x}^2, \quad x^2 = \overline{x}^1 \sin\overline{x}^2, \quad x^3 = \overline{x}^3$$

故由式(a)可得

$$\begin{aligned}
\overline{A}_1 &= \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^1} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^1} A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^1} A_3 \\
&= \cos\overline{x}^2 (2x^1 - x^3) + \sin\overline{x}^2 (x^1)^2 (x^2) \\
&= 2\rho\cos^2\varphi - z\cos\varphi + \rho^3 \sin^2\varphi \cos^2\varphi \\
\overline{A}_2 &= \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^2} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^2} A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^3} A_3 \\
&= -\overline{x}^1 \sin\overline{x}^2 (2x^1 - x^3) + \overline{x}^1 \cos\overline{x}^2 (x^1)^2 x^2 \\
&= -2\rho^2 \sin\varphi\cos\varphi + \rho z \sin\varphi + \rho^4 \sin\varphi\cos^3\varphi \\
\overline{A}_3 &= \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^3} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^3} A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^3} A_3 \\
&= x^2 x^3 = \rho z \sin\varphi
\end{aligned}$$

3.26 试求上题中张量在球面坐标系 r, θ, φ 中的协变分量。

答 $\overline{A}_1 = 2r\sin^2\theta\cos^2\varphi - r\sin\theta\cos\theta\cos\varphi + r^3\sin^4\theta\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin\varphi$

$\overline{A}_2 = 2r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi - r^2\cos^2\theta\cos\varphi + r^4\sin^3\theta\cos\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi - r^3\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi$

$\overline{A}_3 = -2r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi + r^4\sin^4\theta\sin\varphi\cos^3\varphi$

3.27 试证:虽然 A_p 是一阶协变张量,但$\dfrac{\partial A_p}{\partial x^q}$不是张量。

证 根据假设 $\overline{A}_j = \dfrac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j} A_p$,对 $\overline{x}^k$ 求导数:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{A}_j}{\partial \overline{x}^k} &= \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial A_p}{\partial \overline{x}^k} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \overline{x}^j \partial \overline{x}^k} A_p \\
&= \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial A_p}{\partial x^q} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \overline{x}^k \partial \overline{x}^j} A_p \\
&= \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial A_p}{\partial x^q} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \overline{x}^k \partial \overline{x}^j} A_p
\end{aligned}$$

由于第二项的出现,表示它不符合张量的变换律,所以$\dfrac{\partial A_p}{\partial x^q}$不是张量。以后可以看到,在$\dfrac{\partial A_p}{\partial x^q}$后加上一适当的项就会构成张量。

3.28 如果 Φ 是不变量,$\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^p \partial x^q}$是不是张量?

答 不是。

3.29　如果 $\overline{A}^{p}{}_{\cdot\cdot r}=\dfrac{\partial\overline{x}^{p}}{\partial x^{q}}\dfrac{\partial x^{s}}{\partial\overline{x}^{r}}A^{q}{}_{\cdot\cdot s}$，证明 $A^{q}{}_{\cdot\cdot s}=\dfrac{\partial x^{q}}{\partial\overline{x}^{p}}\dfrac{\partial\overline{x}^{r}}{\partial x^{s}}\overline{A}^{p}{}_{\cdot\cdot r}$。

证　用$\dfrac{\partial x^{q}}{\partial\overline{x}^{p}}\dfrac{\partial\overline{x}^{r}}{\partial x^{s}}$乘 $\overline{A}^{p}{}_{\cdot\cdot r}=\dfrac{\partial\overline{x}^{p}}{\partial x^{q}}\dfrac{\partial x^{s}}{\partial\overline{x}^{r}}A^{q}{}_{\cdot\cdot s}$的两边，即得 $A^{p}{}_{\cdot\cdot s}=\dfrac{\partial x^{q}}{\partial\overline{x}^{p}}\dfrac{\partial\overline{x}^{r}}{\partial x^{s}}\overline{A}^{p}{}_{\cdot\cdot r}$。

3.31　设 B^i 与 C^j 是逆变矢量，A_{ij} 是协变张量，试证 $A_{ij}B^iC^j$ 是不变量。

证　根据假设有

$$\overline{A}_{pq}=\frac{\partial x^{i}}{\partial\overline{x}^{p}}\frac{\partial x^{j}}{\partial\overline{x}^{q}}A_{ij},\quad \overline{B}^{p}=\frac{\partial\overline{x}^{p}}{\partial x^{i}}B^{i},\quad \overline{C}^{j}=\frac{\partial\overline{x}^{q}}{\partial x^{j}}C^{j}$$

$$\overline{A}_{pq}\overline{B}^{p}\overline{C}^{q}=\frac{\partial x^{i}}{\partial\overline{x}^{p}}\frac{\partial x^{j}}{\partial\overline{x}^{q}}A_{ij}\frac{\partial\overline{x}^{p}}{\partial x^{i}}B^{i}\frac{\partial\overline{x}^{q}}{\partial x^{j}}C^{j}=A_{ij}B^{i}C^{j}$$

可见，$A_{ij}B^iC^j$ 是不变量。

3.33　试证 $B_{ik}=\in_{ijk}a_j$ 是反对称张量。

证　$B_{ik}=\in_{ijk}a_j=-(\in_{kji}a_j)=-(B_{ki})=-B_{ki}$。

3.34　在三维空间里，按以下方式展开，并尽可能化简 $D_{ij}x_ix_j$：(1)$D_{ij}=D_{ji}$；(2)$D_{ij}=-D_{ji}$。

答　(1) $D_{ij}x_ix_j=D_{11}(x_1)^2+D_{22}(x_2)^2+D_{33}(x_3)^2+2D_{12}x_1x_2+2D_{23}x_2x_3+2D_{31}x_3x_1$

(2) $D_{ij}x_ix_j=0$

第 4 章　张 量 代 数

4.1　设 A_{ij} 和 B_{ij} 是二阶协变张量，试证 $\lambda A_{ij}+\mu B_{ij}$ 是二阶协变张量，式中，λ，μ 是标量。

证

$$\overline{A}_{pq}=\frac{\partial x^{i}}{\partial\overline{x}^{p}}\frac{\partial x^{j}}{\partial\overline{x}^{q}}A_{ij}$$

$$\lambda\overline{A}_{pq}=\frac{\partial x^{i}}{\partial\overline{x}^{p}}\frac{\partial x^{j}}{\partial\overline{x}^{q}}\lambda A_{ij}$$

$$\overline{B}_{pq}=\frac{\partial x^{i}}{\partial\overline{x}^{p}}\frac{\partial x^{j}}{\partial\overline{x}^{q}}B_{ij}$$

$$\mu\overline{B}_{pq}=\frac{\partial x^{i}}{\partial\overline{x}^{p}}\frac{\partial x^{j}}{\partial\overline{x}^{q}}\mu B_{ij}$$

$$\lambda\overline{A}_{pq}+\mu\overline{B}_{pq}=\frac{\partial x^{i}}{\partial\overline{x}^{p}}\frac{\partial x^{j}}{\partial\overline{x}^{q}}(\lambda A_{ij}+\mu B_{ij})$$

所以 $\lambda A_{ij}+\mu B_{ij}$ 是二阶协变张量。

4.2　试问二阶逆变对称张量最多有多少个不同的分量？设(1)$N=4$；(2)$N=b$；(3)N 为任意数。

答　(1) 10；(2) 21；(3) $N(N+1)/2$。

4.3　设张量 $A^{\cdots pq r}_{\cdots s}$ 在一个坐标系中对于指标 p 与 q 是对称的(或反对称的)，试证它在任何坐标系中对于指标 p 与 q 都是对称的(或反对称的)。

证　因为仅就指标 p 与 q 有对称关系，故只需对 B^{pq} 作证明。

若 B^{pq} 是对称的，即 $B^{pq}=B^{qp}$，于是

$$\bar{B}^{jk}=\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}B^{pq}=\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}B^{qp}=\bar{B}^{kj}$$

表明 B^{pq} 在坐标系 $\bar{x}^i$ 中保持对称。

类似地可以证明张量保持反对称关系。

4.5　设 A_{ij} 是对称张量，B_{ij} 是反对称张量，试证 $A_{ij}B_{ij}=0$。

证　因为 $A_{ij}=A_{ji}$，$B_{ij}=-B_{ji}$，于是

$$A_{ij}B_{ij}=-A_{ji}B_{ji}$$

$$A_{ij}B_{ij}+A_{ji}B_{ji}=A_{ij}B_{ij}+A_{pq}B_{pq}=0$$

因为所有的指标都是哑标，所以可写成

$$A_{pq}B_{pq}=A_{ij}A_{ij}$$

于是

$$2A_{ij}B_{ij}=0,\quad A_{ij}B_{ij}=0$$

4.6　设 $A^{p}_{\cdot q}$ 与 B_r 是张量，试证 $A^{p}_{\cdot q}B^{r}$ 与 $A^{p}_{\cdot q}B^{q}$ 是张量，并说明它们的阶数。

答　$A^{p}_{\cdot q}B^{r}$ 是三阶混合张量，$A^{p}_{\cdot q}B^{q}$ 是一阶逆变张量。

4.7　如果用 D_{ij} 的对称部分 $D_{(ij)}$ 代替 D_{ij}，试证二次型 $D_{ij}x_ix_j$ 是不变的。

证　将 D_{ij} 表示为对称与反对称两部分之和：

$$D_{ij}=D_{(ij)}+D_{[ij]}=\frac{1}{2}(D_{ij}+D_{ji})+\frac{1}{2}(D_{ij}-D_{ji})$$

于是

$$D_{(ij)}x_ix_j=\frac{1}{2}(D_{ij}+D_{ji})x_ix_j=\frac{1}{2}(D_{ij}x_ix_j+D_{pq}x_qx_p)$$

$$=\frac{1}{2}(D_{ij}x_ix_j+D_{ij}x_ix_j)=D_{ij}x_ix_j$$

4.9　设 $\Phi=a_{jk}A^jA^k$，试证：总可以写出 $\Phi=b_{jk}A^jA^k$，式中 b_{jk} 是对称的。

证　$\Phi=a_{jk}A^jA^k=a_{kj}A^kA^j=a_{kj}A^jA^k$，于是

$$2\Phi=a_{jk}A^jA^k+a_{kj}A^jA^k=(a_{jk}+a_{kj})A^jA^k$$

所以

$$\Phi=\frac{1}{2}(a_{jk}+a_{kj})A^jA^k$$

因为 $b_{jk}=\frac{1}{2}(a_{jk}+a_{kj})$ 是对称的，命题证毕。

4.11　试证张量 $A^{p}_{\cdot q}$的缩并是标量(或不变量)。

证　$\overline{A}^{j}_{\cdot k}=\dfrac{\partial\overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}\dfrac{\partial x^{q}}{\partial\overline{x}^{k}}A^{p}_{\cdot q}$,设 $j=k$ 并求和:

$$\overline{A}^{j}_{\cdot j}=\frac{\partial\overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}\frac{\partial x^{q}}{\partial\overline{x}^{j}}A^{p}_{\cdot q}=\delta^{q}_{p}A^{p}_{\cdot q}=A^{p}_{\cdot p}$$

由于 $\overline{A}^{j}_{\cdot j}=A^{p}_{\cdot p}$,所以 $A^{p}_{\cdot p}$是不变量。

4.12　设 $A^{pq\cdots}_{\cdots rst}$ 是张量,选择 $p=t$, $q=s$,试证缩并后仍是张量,并说明它的阶数。

答　一阶协变张量。

4.13　试证张量 A^{p} 与 B_{q} 的外积的缩并是不变量。

证　由$\overline{A}^{j}=\dfrac{\partial\overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}A^{p}$, $\overline{B}_{k}=\dfrac{\partial x^{q}}{\partial\overline{x}^{k}}B_{q}$ 得

$$\overline{A}^{j}\overline{B}_{k}=\frac{\partial\overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}\frac{\partial x^{q}}{\partial\overline{x}^{k}}A^{p}B_{q}$$

缩并(令 $j=k$ 并求和)

$$\overline{A}^{j}\overline{B}_{j}=\frac{\partial\overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}\frac{\partial x^{q}}{\partial\overline{x}^{j}}A^{p}B_{q}=\delta^{q}_{p}A^{p}B_{q}=A^{p}B_{q}$$

所以 $A^{p}B_{q}$ 是不变量。

4.14　试建立下列相伴张量之间的关系:(1) A^{pq}与 $A_{j}^{\cdot q}$;(2) $A^{p\cdot r}_{\cdot q}$与 A_{jql}。

解　(1) $A^{pq}=g^{pj}A_{j}^{\cdot q}$;(2) $A^{p\cdot r}_{\cdot q}=g^{pj}g^{rl}A_{jpl}$。

4.15　试建立下列相伴张量之间的关系:(1) $A_{j\cdot l}^{\cdot k}$与 A^{qkr};(2) $A^{p\cdot rs}_{\cdot q\cdot\cdot t}$与 $A_{jqk}^{\cdots sl}$。

解　(1) $A_{j\cdot l}^{\cdot k}=g_{jq}g_{lr}A^{qkr}$, (b) $A^{p\cdot rs}_{\cdot q\cdot\cdot t}=g^{pj}g^{rk}g_{tl}A_{jqk}^{\cdots sl}$。

4.16　试建立下列相伴张量之间的关系:(1) A^{jkl} 与 A_{pqr};(2) $A_{pq}^{\cdot\cdot r}$ 与 $A^{jk}_{\cdot\cdot l}$。

解　(1) $A^{jkl}=g^{jp}g^{kq}g^{lr}A_{pqr}$;(2) $A_{pq}^{\cdot\cdot r}=g_{pj}g_{qk}g^{rl}A^{jk}_{\cdot\cdot l}$

4.17　试证张量 $A^{p}_{\cdot r}$ 与 $B^{qs}_{\cdot\cdot t}$ 的任何一对指标相同时所求的内积是三阶张量。

证　外积 $A^{p}_{\cdot r}B^{qs}_{\cdot\cdot t}=C^{jlm}_{\cdots kn}$。

令 $p=t$,求和可得内积。

由假设

$$\overline{A}^{j}_{\cdot k}=\frac{\partial\overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}\frac{\partial x^{r}}{\partial\overline{x}^{k}}A^{p}_{\cdot r}$$

$$\overline{B}^{lm}_{\cdot\cdot n}=\frac{\partial\overline{x}^{l}}{\partial x^{q}}\frac{\partial\overline{x}^{m}}{\partial x^{s}}\frac{\partial x^{t}}{\partial\overline{x}^{n}}B^{qs}_{\cdot\cdot t}$$

两式相乘得

$$\overline{A}^{j}_{\cdot k}\overline{B}^{lm}_{\cdot\cdot n}=\frac{\partial\overline{x}^{j}}{\partial x^{p}}\frac{\partial x^{r}}{\partial\overline{x}^{k}}\frac{\partial\overline{x}^{l}}{\partial x^{q}}\frac{\partial\overline{x}^{m}}{\partial x^{s}}\frac{\partial x^{t}}{\partial\overline{x}^{n}}A^{p}_{\cdot r}B^{qs}_{\cdot\cdot t}$$

令 $j=n$,求和得

$$\overline{A}^{j}_{\cdot k}\overline{B}^{lm}_{\cdot\cdot j}=\delta^{r}_{p}\frac{\partial x^{r}}{\partial\overline{x}^{k}}\frac{\partial\overline{x}^{l}}{\partial x^{q}}\frac{\partial\overline{x}^{m}}{\partial x^{s}}A^{p}_{\cdot r}B^{qs}_{\cdot\cdot t}=\frac{\partial x^{r}}{\partial\overline{x}^{k}}\frac{\partial\overline{x}^{l}}{\partial x^{q}}\frac{\partial\overline{x}^{m}}{\partial x^{s}}A^{p}_{\cdot r}B^{qs}_{\cdot\cdot p}$$

这就证明了 $A^{p}_{\cdot r}B^{qs}_{\cdot\cdot p}$是三阶张量。令 $q=r$,同样可得内积是三阶张量。

4.19 设 A^p 与 B_q 是任意张量,若 $A^pB_qC(p,q)$是不变量,试证 $C(p,q)$是一张量,并能写成 $C^{q}_{\cdot p}$。

证 因为 $A^pB_qC(p,q)$是不变量,所以

$$\overline{A}^p\overline{B}_q\overline{C}(p,q)=A^jB_kC(j,k)$$

又因为 A^p、B_q 是矢量(一阶张量),所以

$$\overline{A}^p\overline{B}_q\overline{C}(p,q)=\frac{\partial\overline{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^q}A^jB_k\overline{C}(p,q)$$

$$A^jB_kC(j,k)=\frac{\partial\overline{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^q}A^jB_k\overline{C}(p,q)$$

$$A^jB_k\left[\frac{\partial\overline{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^q}\overline{C}(p,q)-C(j,k)\right]=0$$

因为 A^j、B_k 是任意矢量,所以

$$\frac{\partial\overline{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^q}\overline{C}(p,q)=C(j,k)$$

两边乘以$\frac{\partial x^j}{\partial\overline{x}^p}\frac{\partial\overline{x}^q}{\partial x^k}$,得

$$\overline{C}(p,q)=\frac{\partial x^j}{\partial\overline{x}^p}\frac{\partial\overline{x}^q}{\partial x^k}C(j,k)$$

所以 $C(j,k)=C^{k}_{\cdot j}$,即 $C(p,q)=C^{q}_{\cdot p}$

4.21 设 A^i 和 B^i 是任意的逆变矢量,而 $C_{ij}A^iB^j$ 是不变量,试证 C_{ij} 是二阶协变张量。

证法与4.19题相同。

4.23 设 $\mathrm{d}s^2=g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ 是不变量,试证 g_{ij}是二阶对称协变张量。

证 用4.9题,令 $\Phi=\mathrm{d}s^2$, $A^j=\mathrm{d}x^j$, $A^k=\mathrm{d}x^k$,因 $\mathrm{d}s^2$ 是不变量,所以可以认为 g_{jk}是对称的。

$$\overline{g}_{pq}\mathrm{d}\overline{x}^p\mathrm{d}\overline{x}^q=g_{jk}\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k=g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial\overline{x}^p}\mathrm{d}\overline{x}^p\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^q}\mathrm{d}\overline{x}^q$$

$$=g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial\overline{x}^p}\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^q}\mathrm{d}\overline{x}^p\mathrm{d}\overline{x}^q$$

所以

$$\overline{g}_{pq}=g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial\overline{x}^p}\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^q}$$

可见 g_{jk}是二阶对称协变张量,又称为度量张量。

4.24 试求球坐标系中的度量张量。

答　$g_{jk}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}$。

4.25　(1) 用第二行的元素及其余因式展开行列式 $g=\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}$；

(2) 试证 $g=g_{jk}G(j,k)$，式中 $G(j,k)$ 是 g_{jk} 的余因式，该式仅对指标 k 求和。

证　(1) g_{21} 的余因式 $G(2,1)=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}g_{12} & g_{13}\\ g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}$

g_{22} 的余因式 $G(2,2)=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}g_{11} & g_{13}\\ g_{31} & g_{33}\end{vmatrix}$

g_{23} 的余因式 $G(2,3)=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{31} & g_{32}\end{vmatrix}$

根据行列式理论，有

$$g=g_{21}G(2,1)+g_{22}G(2,2)+g_{23}G(2,3)$$

(2) 将(1)的结果用于任何行或任何列，便可得 $g=g_{jk}G(j,k)$，式中仅对 k 求和。

4.27　定义 $g^{jk}=\dfrac{G(j,k)}{g}$，式中 $G(j,k)$ 是行列式 $g=|g_{jk}|\neq 0$ 中元素 g_{jk} 的余因式，试证 $g_{jk}g^{pk}=\delta_j^p$。

证　由题 4.25 有 $g_{jk}\dfrac{G(j,k)}{g}=1$ 或 $g_{jk}g^{jk}=1$，式中仅对 k 求和。

由题 4.26 有 $g_{jk}\dfrac{G(p,k)}{g}=0$，或 $g_{jk}g^{pk}=0, p\neq j$，所以 $g_{jk}g^{pk}=\delta_j^p=\begin{cases}1, & j=p\\ 0, & j\neq p\end{cases}$。

4.29　设矢量 $\boldsymbol{v}_i$ 用基矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示为 $\boldsymbol{v}_i=\alpha\boldsymbol{a}_i+\beta\boldsymbol{b}_i+\gamma\boldsymbol{c}_i$，试证 $\alpha=\dfrac{\in_{ijk}v_ib_jc_k}{\in_{pqr}a_pb_qc_r}$，$\beta=\dfrac{\in_{ijk}a_iv_jc_k}{\in_{pqr}a_pb_qc_r}$，$\gamma=\dfrac{\in_{ijk}a_ib_jv_k}{\in_{pqr}a_pb_qc_r}$。

证

$$v_1=\alpha a_1+\beta b_1+\gamma c_1$$
$$v_2=\alpha a_2+\beta b_2+\gamma c_2$$
$$v_3=\alpha a_3+\beta b_3+\gamma c_3$$

根据克拉默(Cramer)定理，以及用排列符号表示行列式展开的关系，有

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix}v_1 & b_1 & c_1\\ v_2 & b_2 & c_2\\ v_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}=\frac{\in_{ijk}v_ib_jc_k}{\in_{pqr}a_pb_qc_r}$$

同理可写出β与γ。

4.30 设两组坐标系的轴间夹角如表所示，试求其变换系数，并证明它们是互相正交的。

	x^1	x^2	x^3
$\bar{x}^1$	135°	60°	120°
$\bar{x}^2$	90°	45°	45°
$\bar{x}^3$	45°	60°	120°

答 $(a_{ij})=\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$。

4.31 设$\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}^j=\delta_i^j$，则$\boldsymbol{a}^1,\boldsymbol{a}^2,\boldsymbol{a}^3$称为基矢$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$的互逆基矢（不一定是单位矢量），试建立构成互逆基矢的必要关系，并计算下列矢量的逆矢：

$$\boldsymbol{b}_1=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{b}_2=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

解 由定义（即本题的假设）有

$$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}^1=1,\quad \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}^1=\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}^1=0$$

因此$\boldsymbol{a}^1$垂直于$\boldsymbol{a}_2$和$\boldsymbol{a}_3$，也就是平行于$\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3$，即$\boldsymbol{a}^1=\lambda(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)$。

因为$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}^1=1$，即$\boldsymbol{a}_1\cdot\lambda(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)=1$，所以

$$\lambda=\frac{1}{\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3}=\frac{1}{V},\quad V\neq 0$$

于是得到

$$\boldsymbol{a}^1=\frac{\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3}{V},\quad \boldsymbol{a}^2=\frac{\boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{a}_1}{V},\quad \boldsymbol{a}^3=\frac{\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2}{V}$$

对于基矢$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$，$v=\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3=12$，于是

$$\boldsymbol{b}^1=(\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3)/12=(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})/4$$

$$\boldsymbol{b}^2=(\boldsymbol{b}_3\times\boldsymbol{b}_1)/12=-\boldsymbol{i}/3+\boldsymbol{j}/4+\boldsymbol{k}/12$$

$$\boldsymbol{b}^3=(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2)/12=2\boldsymbol{i}/3-\boldsymbol{j}/2+5\boldsymbol{k}/6$$

4.33 设$\mathrm{d}s^2=5(\mathrm{d}x^1)^2+3(\mathrm{d}x^2)^2+4(\mathrm{d}x^3)^2-6\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2+4\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$，试求$g$与$g^{jk}$。

解 $g_{11}=5$，$g_{22}=3$，$g_{33}=4$，$g_{12}=g_{21}=-3$，$g_{23}=g_{32}=2$，$g_{13}=g_{31}=0$，于是

$$g=\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=4$$

g_{jk}的余因式$G(j,k)$：

$G(1,1)=8$，$G(2,2)=20$，$G(3,3)=6$，$G(1,2)=G(2,1)=12$，$G(2,3)=$

$G(3,2)=-10$，$G(1,3)=G(3,1)=-6$。

于是 $g^{11}=2$，$g^{22}=5$，$g^{33}=3/2$，$g^{12}=g^{21}=3$，$g^{23}=g^{32}=-5/2$，$g^{13}=g^{31}=-3/2$。

用(g_{jk})与(g^{jk})相乘应是单位矩阵来校核计算结果。

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3/2 \\ 3 & 5 & -5/2 \\ -3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.34　设 $ds^2=3(dx^1)^2+2(dx^2)^2+4(dx^3)^2-6dx^1dx^3$，试求 g 与 g^{jk}。

答　$g=6,(g^{jk})=\begin{pmatrix} 4/3 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

4.35　(1) 设 A^p 与 B^q 是矢量，试证 $g_{pq}A^pB^q$ 是不变量；(2) 再证 $\dfrac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}}$是不变量。

证　(1) 因为 g_{pq}是二阶协变张量，根据 4.21 题，可知 $g_{pq}A^pB^q$ 是不变量。

(2) 因为 $\overline{A}^j\overline{A}_j=\dfrac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^p}\dfrac{\partial x^q}{\partial\overline{x}^j}A^pA_q=\delta^p_qA^pA_q=A^pA_p$（不变量），$A^pA_p$、$B^qB_q$ 是不变量，所以$\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}$是不变量，于是$\dfrac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}}$是不变量。

我们知道，这就是矢量 A^p 与 B^q 之间夹角的余弦，即

$$\cos\theta=\frac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{(A^pA_q)(B^pB_q)}}$$

当 $g_{pq}A^pB^q=A^pB_p=0$ 时，两矢量正交。

4.36　两组笛卡儿直角坐标轴间夹角的方向余弦部分地列于表中，如果 $\overline{x}^1,\overline{x}^2,\overline{x}^3$ 也是右手系，试填写表的最下一行的空格。

	x^1	x^2	x^3
$\overline{x}^1$	3/5	$-4/5$	0
$\overline{x}^2$	0	0	1
$\overline{x}^3$			

答　$-4/5,-3/5,0$。

4.37　试证三维空间里曲线坐标之间夹角的余弦为

$$\cos\theta_{12}=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},\quad \cos\theta_{23}=\frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}},\quad \cos\theta_{31}=\frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}}$$

证　沿 x^1 坐标曲线，$x^2=$常量，$x^3=$常量，于是度量形式为 $\mathrm{d}s^2=g_{11}(\mathrm{d}x^1)^2$ 或 $\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}s}=1/\sqrt{g_{11}}$，沿 x^1 曲线的单位切矢量 $A_1^r=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\delta_1^r$。

同理可得沿曲线 x^2、x^3 的单位切矢量

$$A_2^r=\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta_2^r,\quad A_3^r=\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\delta_3^r$$

A_1^r 和 A_2^r 之间夹角的余弦

$$\cos\theta_{12}=g_{pq}A_1^pA_2^q=g_{pq}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta_1^p\delta_2^q=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$$

用类似的方法可求得其他两个夹角的余弦。

4.39　试证 $L^2=g_{pq}A^pA^q$ 不是变量。

证　A_j 和 A^k 是一矢量的协变分量和逆变分量，于是

$$\bar{A}_p=\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^p}A_j,\quad \bar{A}^q=\frac{\partial\bar{x}^q}{\partial x^k}A^k$$

$$\bar{A}_p\bar{A}^p=\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial\bar{x}^p}{\partial x^k}A_jA^k=\delta_k^jA_jA^k=A_jA^j$$

可见 A_jA^j 是不变量，记为 L^2，因此我们可以写

$$L^2=A_jA^j=g_{jk}A^kA^j=g_{pq}A^pA^q$$

4.41　设 $A_j=g_{jk}A^k$，试证 $A^k=g^{jk}A_j$。

证　用 g^{jq} 乘 $A_j=g_{jk}A^k$ 的两边有

$$g^{jq}A_j=g^{jq}g_{jk}A^k=\delta_k^qA^k=A^q$$

即

$$A^q=g^{jq}A_j\quad \text{或}\quad A^k=g^{jk}A_j$$

4.43　计算柱坐标系的共轭基本张量。

解　因为 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\rho^2+\rho^2\mathrm{d}\varphi^2+\mathrm{d}z^2$，若 $x^1=\rho,x^2=\varphi,x^3=z$，则 $g_{11}=1,g_{22}=\rho^2$，$g_{33}=1,g_{12}=g_{21}=g_{23}=g_{32}=g_{13}=g_{31}=0$，所以

$$\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\rho^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$g=|g_{jk}|=\rho^2$$

$$g^{11}=\frac{g_{11}\text{ 的余因式}}{g}=\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix}\rho^2&0\\0&1\end{vmatrix}=1$$

$$g^{22}=\frac{g_{22}\text{ 的余因式}}{g}=\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=\frac{1}{\rho^2}$$

$$g^{33}=\frac{g_{33}\text{ 的余因式}}{g}=\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix}1&0\\0&\rho^2\end{vmatrix}=1$$

$$g^{12}=\frac{g_{12}\text{ 的余因式}}{g}=-\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0$$

还可算得 $g^{jk}=0, j\neq k$。因此得到

$$\begin{bmatrix}g^{11} & g^{12} & g^{13}\\ g^{21} & g^{22} & g^{23}\\ g^{31} & g^{32} & g^{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\rho^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

4.44　计算球坐标系的共轭基本张量。

答

$$\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}g^{11} & g^{12} & g^{13}\\ g^{21} & g^{22} & g^{23}\\ g^{31} & g^{32} & g^{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/r^2 & 0\\ 0 & 0 & 1/r^2\sin^2\theta\end{bmatrix}$$

4.45　试将下列变换方程写成矩阵形式：(1) 协变矢量的变换方程；(2) 二阶逆变张量的变换方程($N=3$)。

解　(1) $\bar{A}_p=\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p}A_q$，列矢量形式：

$$\begin{bmatrix}\bar{A}_1\\ \bar{A}_2\\ \bar{A}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1}\\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2}\\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{bmatrix}$$

或行矢量形式：

$$(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3)=(A_1, A_2, A_3)\begin{bmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3}\\ \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3}\\ \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3}\end{bmatrix}$$

(2) $\bar{A}^{pr}=\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}A^{qs}$

$$\begin{pmatrix}\bar{A}^{11} & \bar{A}^{12} & \bar{A}^{13}\\ \bar{A}^{21} & \bar{A}^{22} & \bar{A}^{23}\\ \bar{A}^{31} & \bar{A}^{32} & \bar{A}^{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^3}\\ \frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^3}\\ \frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{11} & A^{12} & A^{13}\\ A^{21} & A^{22} & A^{23}\\ A^{31} & A^{32} & A^{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^1}\\ \frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^2}\\ \frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^3} & \frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^3} & \frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^3}\end{pmatrix}$$

4.46　试将下列变换方程写成矩阵形式：(1) 逆变矢量的变换方程；(2) 二阶协变张量的变换方程；(3) 二阶混合张量的变换方程($N=3$)。

答　(1),(2)略。

(3)
$$\begin{pmatrix}\bar{A}_1^1 & \bar{A}_2^1 & \bar{A}_3^1\\ \bar{A}_1^2 & \bar{A}_2^2 & \bar{A}_3^2\\ \bar{A}_1^3 & \bar{A}_2^3 & \bar{A}_3^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^3}\\ \frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^3}\\ \frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1^1 & A_2^1 & A_3^1\\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2\\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^2} & \frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^3}\\ \frac{\partial x^2}{\partial\bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial\bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial\bar{x}^3}\\ \frac{\partial x^3}{\partial\bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial\bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial\bar{x}^3}\end{pmatrix}$$

4.47　设二阶对称张量 A_{ij} 的矩阵表示形式为 $(A_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，试求它的本征值与本征矢量。

解　本征方程 $(\boldsymbol{A}-\lambda_{(k)}\boldsymbol{I})X^{(k)}=0$ (k 不求和，下同)写成分量形式

$$(A_{ij}-\lambda_{(k)}\delta_i^j)x_j^{(k)}=0$$

在三维欧几里得空间里，

$$\begin{aligned}(A_{11}-\lambda_{(k)})x_1^{(k)}+A_{12}x_2^{(k)}+A_{13}x_3^{(k)}&=0\\ A_{21}x_1^{(k)}+(A_{22}-\lambda_{(k)})x_2^{(k)}+A_{23}x_3^{(k)}&=0\\ A_{31}x_1^{(k)}+A_{32}x_2^{(k)}+(A_{33}-\lambda_{(k)})x_3^{(k)}&=0\end{aligned}$$

本征方程

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(1-\lambda)(\lambda-3)=0$$

得本征值 $\lambda_{(1)}=0,\lambda_{(2)}=1,\lambda_{(3)}=3$。

对于 $\lambda_{(1)}=0$，本征方程化为

$$x_1^{(1)}+x_2^{(1)}=0,\quad x_1^{(1)}+2x_2^{(1)}+x_3^{(1)}=0,\quad x_2^{(1)}+x_3^{(1)}=0$$

解得

$$x_1^{(1)}=-x_2^{(1)},\quad x_3^{(1)}=-x_2^{(1)}$$

选 $x_2^{(1)}=-1$，得本征矢量

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$$

对于 $\lambda_{(2)}=1$，本征方程化为

$$x_2^{(2)}=0,\quad x_1^{(2)}+x_2^{(2)}+x_3^{(2)}=0$$

选 $x_1^{(2)}=1$，便有 $x_3^{(2)}=-1$，于是得本征矢量

$$\boldsymbol{x}^{(2)}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3$$

对于 $\lambda_{(3)}=3$，本征方程化为

$$-2x_1^{(3)}+x_2^{(3)}=0,\quad x_1^{(3)}-x_2^{(3)}+x_3^{(3)}=0,\quad x_2^{(3)}-2x_3^{(3)}=0$$

解得

$$x_2^{(3)}=2x_1^{(3)},\quad x_1^{(3)}=x_3^{(3)}$$

选 $x_1^{(3)}=1$，便得本征矢量

$$\boldsymbol{x}^{(3)}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$$

显然，本征矢量 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 是互相正交的。

4.48　设二阶对称张量的矩阵$(A_{ij})=\begin{pmatrix}7&3&0\\3&7&4\\0&4&7\end{pmatrix}$，试求它的主值和主轴方向。

	x^1	x^2	x^3
$\bar{x}^1$	$-3/5\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$-4/5\sqrt{2}$
$\bar{x}^2$	$4/5$	0	$-3/5$
$\bar{x}^3$	$3/5\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$4/5\sqrt{2}$

答　$\lambda_{(1)}=2$，$\lambda_{(2)}=7$，$\lambda_{(3)}=12$。

4.49　将题 4.47 中的张量 A_{ij} 化为对角形。

解　用正规正交化法（见附录 B）。

首先，设 $\bar{\boldsymbol{e}}_1=\boldsymbol{x}^{(1)}/|\boldsymbol{x}^{(1)}|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)$；

其次，$\bar{\boldsymbol{e}}_2=\dfrac{\boldsymbol{x}^{(2)}-(\boldsymbol{x}^{(2)}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_1)\bar{\boldsymbol{e}}_1}{|\boldsymbol{x}^{(2)}-(\boldsymbol{x}^{(2)}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_1)\bar{\boldsymbol{e}}_1|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_3$；

最后，$\bar{\boldsymbol{e}}_3=\dfrac{\boldsymbol{x}^{(3)}-(\boldsymbol{x}^{(3)}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_1)\bar{\boldsymbol{e}}_1-(\boldsymbol{x}^{(3)}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_2)\bar{\boldsymbol{e}}_2}{|\boldsymbol{x}^{(3)}-(\boldsymbol{x}^{(3)}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_1)\bar{\boldsymbol{e}}_1-(\boldsymbol{x}^{(3)}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_2)\bar{\boldsymbol{e}}_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{e}_1+\dfrac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{e}_2+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{e}_3$，

得变换矩阵

$$(M_{ij})=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}}&-\dfrac{1}{\sqrt{3}}&\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}&0&-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\dfrac{1}{\sqrt{6}}&\dfrac{2}{\sqrt{6}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{MAM}^{\mathrm{T}}$$

$$(\bar{A}_{ij})=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

4.50 计算张量 $\boldsymbol{B}=(B_{ij})=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 的平方根$\sqrt{\boldsymbol{B}}$。

答 $\sqrt{B}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) & \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) & 0\\ \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) & \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$。

4.51 设张量 $\boldsymbol{A}=(A_{ij})=\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ -1 & 4 & 0\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$，利用 $\boldsymbol{A}^2$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的主轴重合这一结论，求 $\boldsymbol{A}$ 的平方根$\sqrt{\boldsymbol{A}}$。

解 先求 $\boldsymbol{A}$ 的主值，并化为对角矩阵，

$$\bar{\boldsymbol{A}}=(\bar{A}_{ij})=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

其变换矩阵是

$$\boldsymbol{M}=(M_{ij})=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\bar{\boldsymbol{A}}}=(\sqrt{\bar{A}_{ij}})=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{6}\end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\sqrt{\bar{\boldsymbol{A}}}\boldsymbol{M}$$

$$(\sqrt{A_{ij}})=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+4 & \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+\sqrt{6}+1 & \sqrt{2}-\sqrt{6}+1 \\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}-\sqrt{6}+1 & \sqrt{2}+\sqrt{6}+1 \end{pmatrix}$$

4.52　设张量 $\boldsymbol{B}=(B_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，利用凯莱-哈密顿定理求 $\boldsymbol{B}^4$。

答　$B^4=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 81 & 0 \\ 7 & 0 & 26 \end{pmatrix}$。

第 5 章　张量分析

5.1　试证：(1) $[ij,k]=[ji,k]$；(2) $\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} k \\ ji \end{Bmatrix}$。

证　(1) $[ij,k]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)=[ji,k]$

(2) $\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}=g^{kl}[ij,l]=g^{kl}[ji,l]=\begin{Bmatrix} k \\ ji \end{Bmatrix}$

5.3　试证 $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=[ik,j]+[jk,i]$。

证　
$$[ik,j]+[jk,i]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

5.5　计算当 $i\neq j$ 时，$g_{ij}=0$ 空间里的第一种克里斯托费尔符号。

解　下面不使用求和约定。

当 $i=j=k$，$[ij,k]=[ii,i]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}$；

当 $i=j\neq k$，$[ij,k]=[ii,k]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}$；

当 $i=k\neq j$，$[ij,k]=[ij,i]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^i}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}$；

当 $i\neq j\neq k$，$[ij,k]=0$。

5.6　计算当 $i\neq j$ 时，$g_{ij}=0$ 空间里的第二种克里斯托费尔符号。

答 $\begin{Bmatrix} i \\ ii \end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\ln g_{ii}$；

$\begin{Bmatrix} k \\ ii \end{Bmatrix}=-\frac{1}{2g_{kk}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}$，$\begin{Bmatrix} i \\ ij \end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^j}\ln g_{ii}$；

$\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}=0 \quad (i\neq j\neq k)$。

5.7 试求以下坐标系中的第二种克里斯托费尔符号：(1) 笛卡儿直角坐标系；(2) 柱坐标系；(3) 球坐标系。

解 因为在正交坐标系中，当 $i\neq j$ 时，$g_{ij}=0$，所以，可以利用题5.5和题5.6的结果。

(1) 在笛卡儿直角坐标系里，$g_{ii}=1$，所以$\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}=0$。

(2) 在柱坐标系里，$x^1=\rho, x^2=\varphi, x^3=z$；$g_{11}=1, g_{22}=\rho^2, g_{33}=1$，所以仅在 $i=2$ 时才有不为零的第二种克里斯托费尔符号。

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix}=-\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2)=-\rho$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix}=\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=\frac{1}{\partial\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2)=\frac{1}{\rho}$$

(3) 在球坐标系里，$x^1=r, x^2=\theta, x^3=\varphi$；$g_{11}=1, g_{22}=r^2, g_{33}=r^2\sin^2\theta$。$i=2$ 或 3 时，有不为零的第二种克里斯托费尔符号。

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix}=-\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2)=-r$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix}=\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=\frac{1}{\partial r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2)=\frac{1}{r}$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 33 \end{Bmatrix}=-\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin^2\theta)=-r\sin^2\theta$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 33 \end{Bmatrix}=-\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}=-\frac{1}{2r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\sin^2\theta)=-\sin\theta\cos\theta$$

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 31 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 3 \\ 13 \end{Bmatrix}=\frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}=\frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin^2\theta)=\frac{1}{r}$$

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 32 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 3 \\ 23 \end{Bmatrix}=\frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}=\frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\sin^2\theta)=\cos\theta$$

5.8 试求以下坐标系中的第一种克里斯托费尔符号：(1)笛卡儿直角坐标系；(2)柱坐标系；(3)球坐标系。

答 (1) 全部为零。(2) $[22,1]=-\rho$，$[12,2]=[21,2]=\rho$，其他的均为零。

(3)$[22,1]=-r,[33,1]=-r\sin^2\theta,[33,2]=-r^2\sin\theta\cos\theta,[21,2]=[12,2]=r,$ $[31,3]=[13,3]=r\sin^2\theta,[32,3]=[23,3]=r^2\sin\theta\cos\theta$，其他均为零。

5.9 计算度量为 $ds^2=(dx^1)^2+[(x^2)^2-(x^1)^2](dx^2)^2$ 时的第二种克里斯托费尔符号。

解 因为 $g_{11}=1, g_{22}=(x^2)^2-(x^1)^2, g_{33}=0$，且其他 $g_{ij}=0(i\neq j)$，所以可利用题5.6的结果，于是有

$$\begin{Bmatrix}1\\22\end{Bmatrix}=-\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=-\frac{1}{2}(-2x^1)=x^1$$

$$\begin{Bmatrix}2\\21\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}=\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=\frac{-x^1}{(x^2)^2-(x^1)^2}$$

$$\begin{Bmatrix}2\\22\end{Bmatrix}=\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}=\frac{x^2}{(x^2)^2-(x^1)^2}$$

其他均为零。

5.10 计算第二种克里斯托费尔符号，相应的度量为(1) $ds^2=(dx^1)^2+(x^1)^2(dx^2)^2+(x^1)^2\sin^2x^2(dx^3)^2$；(2) $ds^2=(dx^1)^2+G(x^1,x^2)(dx^2)^2$，其中 G 是 x^1 和 x^2 的函数。

答 只有下列第二种克里斯托费尔符号不为零。

(1) $\begin{Bmatrix}1\\22\end{Bmatrix}=-x^1, \begin{Bmatrix}1\\33\end{Bmatrix}=-x^1\sin^2x^2, \begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}=\dfrac{1}{x^1}, \begin{Bmatrix}2\\33\end{Bmatrix}=-\sin x^2\cos x^2,$

$\begin{Bmatrix}3\\13\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3\\31\end{Bmatrix}=\dfrac{1}{x^1}, \begin{Bmatrix}3\\23\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3\\32\end{Bmatrix}=\cot x^2$；

(2) $\begin{Bmatrix}1\\22\end{Bmatrix}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial x^1}, \begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\21\end{Bmatrix}=\dfrac{1}{2G}\dfrac{\partial G}{\partial x^1}, \begin{Bmatrix}2\\22\end{Bmatrix}=\dfrac{1}{2G}\dfrac{\partial G}{\partial x^2}$。

5.11 试证 $\dfrac{\partial^2 x^m}{\partial\bar{x}^j\partial\bar{x}^k}=\overline{\begin{Bmatrix}n\\jk\end{Bmatrix}}\dfrac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^n}-\dfrac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^j}\dfrac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^k}\begin{Bmatrix}m\\pq\end{Bmatrix}$。

证 见5.1节的式(5.12)。

5.12 试求下列张量相对于 x^q 的协变导数；

(1) $g_{jk}A^k$；(2) A^jB_k；(3) $\delta^j_kA_j$。

答 $g_{jk}A^k_{\cdot q}$，$A^j_{\cdot q}B_k+A^jB_{k\cdot q}$，$\delta^j_kA_{j\cdot q}$。

5.13 试求下列张量相对于 x^q 的协变导数：

(1) A_{jk}；(2) A^{jk}；(3) $A^j_{\cdot k}$；(4) $A^j_{\cdot kl}$；(5) $A^{jkl}_{\cdots mn}$

解 (1) $A_{jk\cdot q}=\dfrac{\partial A_{jk}}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix}s\\jq\end{Bmatrix}A_{sk}-\begin{Bmatrix}s\\kq\end{Bmatrix}A_{js}$

(2) $A^{jk}_{\cdot q}=\dfrac{\partial A^{jk}}{\partial x^q}+\begin{Bmatrix}j\\qs\end{Bmatrix}A^{sk}+\begin{Bmatrix}k\\qs\end{Bmatrix}A^{js}$

(3) $A^{j}{}_{\cdot k,q}=\frac{\partial A^{j}{}_{\cdot k}}{\partial x^{q}}-\begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}A^{j}{}_{\cdot s}-\begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^{s}{}_{\cdot k}$

(4) $A^{j}{}_{\cdot kl,q}=\frac{\partial A^{j}{}_{\cdot kl}}{\partial x^{q}}-\begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}A^{j}{}_{\cdot l}-\begin{Bmatrix} s \\ lq \end{Bmatrix}A^{j}{}_{\cdot ks}+\begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^{s}{}_{\cdot kl}$

(5) $A^{jkl}{}_{\cdots mn,q}=\frac{\partial A^{jks}{}_{\cdots mn}}{\partial x^{q}}-\begin{Bmatrix} s \\ mq \end{Bmatrix}A^{jkl}{}_{\cdots sn}-\begin{Bmatrix} s \\ nq \end{Bmatrix}A^{jkl}{}_{\cdots ms}+\begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^{skl}{}_{\cdots mn}$

$$+\begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix}A^{jsl}{}_{\cdots mn}+\begin{Bmatrix} l \\ qs \end{Bmatrix}A^{jks}{}_{\cdots mn}$$

5.15 设 A_p 是张量,试证 $A_{p,q}\equiv\frac{\partial A_p}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}A_s$ 是张量。

证 因为 $\overline{A}_j=\frac{\partial x_r}{\partial \overline{x}^j}A_r$,所以

$$\frac{\partial \overline{A}_j}{\partial \overline{x}^k}=\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial A_r}{\partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k}+\frac{\partial^2 x^r}{\partial \overline{x}^j\partial \overline{x}^k}A_r$$

将

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial \overline{x}^j\partial \overline{x}^k}=\overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^n}-\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^k}\begin{Bmatrix} r \\ il \end{Bmatrix}$$

代入上式,得

$$\frac{\partial \overline{A}_j}{\partial \overline{x}^k}=\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial A_r}{\partial x^t}+\overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^n}-\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^k}\begin{Bmatrix} r \\ il \end{Bmatrix}A_r$$

$$=\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial A_p}{\partial x^q}+\overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}}\overline{A}_n-\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}A_s$$

$$\frac{\partial \overline{A}_j}{\partial \overline{x}^k}-\overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}}\overline{A}_n=\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k}\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}A_s\right)$$

可见 $A_{p,q}$是张量。

5.17 试证以下各项的协变导数为零:(1)g_{jk};(2)g^{jk};(3)δ^j_k。

证 (1) $g_{jk,q}=\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix} s \\ jq \end{Bmatrix}g_{sk}-\begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}g_{js}$

$$=\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q}-[jq,k]-[kq,j]$$

根据题 5.3,可知 $g_{jk,q}=0$。

(2) $g^{jk}_{,q}=\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^q}+\begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^{sk}+\begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix}A^{js}$

根据题 5.4,可知 $g^{jk}_{,q}=0$。

(3) $\delta^j_{k,q}=\frac{\partial \delta^j_k}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}\delta^j_s+\begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}\delta^s_k=0-\begin{Bmatrix} j \\ kq \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} j \\ qk \end{Bmatrix}=0$

5.19 试求 $A^{j}_{\cdot k}B^{lm}_{\cdot\cdot n}$ 相对于 x^q 的协变导数。

解
$$(A^{j}_{\cdot k}B^{lm}_{\cdot\cdot n})_{,q}=\frac{\partial(A^{j}_{\cdot k}B^{lm}_{\cdot\cdot n})}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix}s\\kq\end{Bmatrix}A^{j}_{\cdot s}B^{lm}_{\cdot\cdot n}-\begin{Bmatrix}s\\nq\end{Bmatrix}A^{j}_{\cdot k}B^{lm}_{\cdot\cdot s}$$
$$+\begin{Bmatrix}j\\qs\end{Bmatrix}A^{s}_{\cdot k}B^{lm}_{\cdot\cdot n}+\begin{Bmatrix}l\\qs\end{Bmatrix}A^{j}_{\cdot s}B^{lm}_{\cdot\cdot n}+\begin{Bmatrix}m\\qs\end{Bmatrix}A^{j}_{\cdot k}B^{ls}_{\cdot\cdot n}$$
$$=\left(\frac{\partial A^{j}_{\cdot k}}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix}s\\kq\end{Bmatrix}A^{j}_{\cdot s}+\begin{Bmatrix}j\\qs\end{Bmatrix}A^{s}_{\cdot k}\right)B^{lm}_{\cdot\cdot n}$$
$$+A^{j}_{\cdot k}\left(\frac{\partial B^{lm}_{\cdot\cdot n}}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix}s\\nq\end{Bmatrix}B^{lm}_{\cdot\cdot s}+\begin{Bmatrix}l\\qs\end{Bmatrix}B^{sm}_{\cdot\cdot n}+\begin{Bmatrix}m\\qs\end{Bmatrix}B^{ls}_{\cdot\cdot n}\right)$$
$$=A^{j}_{\cdot k,q}B^{lm}_{\cdot\cdot n}+A^{j}_{\cdot k}B^{lm}_{\cdot\cdot n,q}$$

5.21 求证 $(g_{jk}A^{km}_{\cdot\cdot n})_{,q}=g_{jk}A^{km}_{\cdot\cdot n,q}$。

证 因为 $g_{jk,q}=0$，所以
$$(g_{jk}A^{km}_{\cdot\cdot n})_{,q}=g_{jk,q}A^{km}_{\cdot\cdot n}+g_{jk}A^{km}_{\cdot\cdot n,q}=g_{jk}A^{km}_{\cdot\cdot n}$$

5.23 在柱坐标系中，试用逆变矢量 A^p 的物理分量表示 A^p 的散度 $\mathrm{div}A^p$。

解 柱坐标系 $x^1=\rho,\ x^2=\varphi,\ x^3=z$，所以
$$g=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&\rho^2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=\rho^2,\quad \sqrt{g}=\rho$$

用 A_ρ,A_φ,A_z 表示 A^p 的物理分量，则
$$A_\rho=\sqrt{g_{11}}A^1=A^1,\quad A_\varphi=\sqrt{g_{22}}A^2=\rho A^2,\quad A_z=\sqrt{g_{33}}A^3=A^3$$
$$\mathrm{div}A^p=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k)$$
$$=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{\partial}{\partial\varphi}A_\varphi+\frac{\partial}{\partial z}(\rho A_z)\right]$$

5.24 在球坐标系里，试用 A^p 的物理分量表示 $\mathrm{div}A^p$。

答 $\mathrm{div}A^p=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$。

5.25 在以下坐标系里计算 $\nabla^2\Phi$：(1)柱坐标系；(2)球坐标系。

解 $\mathrm{grad}\Phi=\nabla\Phi=\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^r}=\Phi_{,r}$。

与 $\Phi_{,r}$ 相伴的一阶逆变张量是 $A^p=g^{kr}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^r}$，根据式(5.42)，有
$$\nabla^2\Phi=\mathrm{div}\left(g^{kr}\frac{\partial\Phi}{\partial x^r}\right)=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}g^{kr}\frac{\partial\Phi}{\partial x^r}\right)$$

(1) 在柱坐标系中，$g^{11}=1,\ g^{22}=1/\rho^2,\ g^{33}=1,\ \sqrt{g}=\rho$，所以

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]$$
$$=\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

(2) 在球坐标系中, $g^{11}=1$, $g^{22}=1/r^2$, $g^{33}=1/r^2\sin^2\theta$, $\sqrt{g}=1/r^2\sin\theta$,所以

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

5.27 设下列张量是 t 的可导函数,试求它们的内禀导数:(1) 不变量 Φ;(2) A^j;(3) $A^j_{\cdot k}$;(4) $A^{jk}_{\cdot\cdot lmn}$。

解 (1) $\dfrac{\delta\Phi}{\delta t}=\Phi_{,q}\dfrac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^q}\dfrac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$

(2)
$$\frac{\delta A^j}{\delta t}=A^j_{,q}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial A^j}{\partial x^q}+\begin{Bmatrix}j\\qs\end{Bmatrix}A^s\right)\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$
$$=\frac{\partial A^j}{\partial x^q}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix}j\\qs\end{Bmatrix}A^s\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}A^j}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix}j\\qs\end{Bmatrix}A^s\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

(3)
$$\frac{\delta A^j_{\cdot k}}{\delta t}=A^j_{\cdot k,q}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial A^j_{\cdot k}}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix}s\\kq\end{Bmatrix}A^j_{\cdot s}+\begin{Bmatrix}j\\qs\end{Bmatrix}\right)A^s_{\cdot k}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$
$$=\frac{\mathrm{d}A^j_{\cdot k}}{\mathrm{d}t}-\begin{Bmatrix}s\\kq\end{Bmatrix}A^j_{\cdot s}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix}j\\qs\end{Bmatrix}A^s_{\cdot k}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

(4)
$$\frac{\delta A^{jk}_{\cdot\cdot lmn}}{\delta t}=A^{jk}_{\cdot\cdot lmn,q}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial A^{jk}_{\cdot\cdot lmn}}{\partial x^q}-\begin{Bmatrix}s\\lq\end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot smn}\right.$$
$$\left.-\begin{Bmatrix}s\\mq\end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot lsn}-\begin{Bmatrix}s\\nq\end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot lms}+\begin{Bmatrix}j\\qs\end{Bmatrix}A^{sk}_{\cdot\cdot lmn}+\begin{Bmatrix}k\\qs\end{Bmatrix}A^{js}_{\cdot\cdot lmn}\right)\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$
$$=\frac{\mathrm{d}A^{jk}_{\cdot\cdot lmn}}{\mathrm{d}t}-\begin{Bmatrix}s\\lq\end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot smn}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}-\begin{Bmatrix}s\\mq\end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot lsn}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}-\begin{Bmatrix}s\\nq\end{Bmatrix}A^{jk}_{\cdot\cdot lms}$$
$$\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix}j\\qs\end{Bmatrix}A^{sk}_{\cdot\cdot lmn}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix}k\\qs\end{Bmatrix}A^{js}_{\cdot\cdot lmn}\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$$

5.28 试求以下各项的内禀导数:(1) $g_{jk}A^k$;(2) $\delta^j_kA_j$;(3) $g_{jk}\delta^j_rA^r_{\cdot p}$。

答 (1) $g_{jk}\dfrac{\delta A^k}{\delta t}=g_{jk}\left(\dfrac{\mathrm{d}A^k}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix}k\\qs\end{Bmatrix}A^s\dfrac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}\right)$

(2) $\delta^j_k\dfrac{\delta A_j}{\delta t}=\dfrac{\mathrm{d}A_k}{\mathrm{d}t}-\begin{Bmatrix}s\\kq\end{Bmatrix}A_s\dfrac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}$

(3) $g_{jk}\delta^j_r\dfrac{\delta A^r_{\cdot p}}{\delta t}=g_{rk}\left(\dfrac{\mathrm{d}A^r_{\cdot p}}{\mathrm{d}t}-\begin{Bmatrix}s\\pq\end{Bmatrix}A^r_{\cdot s}\dfrac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}+\begin{Bmatrix}r\\qs\end{Bmatrix}A^s_{\cdot p}\dfrac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}\right)$

5.31　设 $A^{\cdot p}_{\cdot q}$ 与 $B^{rs}_{\cdot\cdot t}$ 分别是权为 ω_1 和 ω_2 的相对张量，试证它们的内积与外积是权为 $\omega_1+\omega_2$ 的相对张量。

证　由假设有

$$\overline{A}^{\cdot j}_{\cdot k}=\left|\frac{\partial\overline{x}}{\partial x}\right|^{-\omega_1}\frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial\overline{x}^k}A^{\cdot p}_{\cdot q}$$

$$\overline{B}^{lm}_{\cdot\cdot n}=\left|\frac{\partial\overline{x}}{\partial x}\right|^{-\omega_2}\frac{\partial\overline{x}^l}{\partial x^r}\frac{\partial\overline{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial\overline{x}^n}B^{rs}_{\cdot\cdot t}$$

外积

$$\overline{A}^{\cdot j}_{\cdot k}\overline{B}^{lm}_{\cdot\cdot n}=\left|\frac{\partial\overline{x}}{\partial x}\right|^{-(\omega_1+\omega_2)}\frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial\overline{x}^k}\frac{\partial\overline{x}^l}{\partial x^r}\frac{\partial\overline{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial\overline{x}^n}A^{\cdot p}_{\cdot q}B^{rs}_{\cdot\cdot t}$$

可见外积是权为 $\omega_1+\omega_2$ 的相对张量。任何内积都是外积的缩并，所以内积也是权为 $\omega_1+\omega_2$ 的相对张量。

第 7 章　张量分析在变形体力学中的应用

7.1　设在 P 点的应力张量为 $(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$，某平面法向量为 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{3}(2,1,-2)$，求作用在该平面上的应力和沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的应力。

解　作用在该平面上的应力为

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{n}(\sigma_{ij})=\frac{1}{2}(2,\ 1,\ -2)\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -1\right)$$

沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的应力为

$$\sigma_n=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{10}{9}$$

7.2　物体内某处的应力张量的分量可以表示成矩阵 $(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，求作用在平面 $x+3y+z=1$ 上的应力向量。

解　平面 $x+3y+z=1$ 的法向量的方向余弦为 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{11}},\ \frac{3}{\sqrt{11}},\ \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$，因此，作用在其上的应力向量为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{n}(\sigma_{ij}) = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{5}{\sqrt{11}}, \frac{7}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}\right)$$

若用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示在 x,y,z 轴方向的单位向量，则有

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{5}{\sqrt{11}}\boldsymbol{i} + \frac{7}{\sqrt{11}}\boldsymbol{j} + \frac{3}{\sqrt{11}}\boldsymbol{k}$$

7.3 物体内一点的应力状态由下面的矩阵给出：$(\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} 200 & 400 & 300 \\ 400 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & -100 \end{bmatrix}$，试求通过这点，并平行于平面 $x+2y+2z-6=0$ 的平面上的应力向量。

解 平面 $x+2y+2z-6=0$ 的法向量的方向余弦为 $\boldsymbol{n}=\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$，因此，所求应力向量为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{n}(\sigma_{ij}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\begin{bmatrix} 200 & 400 & 300 \\ 400 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & -100 \end{bmatrix} = \left(\frac{1600}{3}, \frac{400}{3}, \frac{100}{3}\right)$$

若用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示在 x,y,z 轴方向的单位向量，则有

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1600}{3}\boldsymbol{i} + \frac{400}{3}\boldsymbol{j} + \frac{100}{3}\boldsymbol{k}$$

7.4 物体内一点的应力状态由下面的矩阵给出：$(\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} 100 & -10 & 20 \\ -10 & 40 & 0 \\ 20 & 0 & -100 \end{bmatrix}$，试求不变量 I_1, I_2, I_3 及主应力的值。

解 $\det(\boldsymbol{\sigma}-\lambda\boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(2-\lambda)(1+\lambda)=0$

解得本征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-1$，主应力的值就是本征值，所以主应力为

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (0, 2, -1)$$

不变量为

$$I_1 = \operatorname{tr}(\sigma_{ij}) = \sigma_{ii} = 1$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[((\operatorname{tr}(\sigma_{ij}))^2 - \operatorname{tr}(\sigma_{ij}^2))\right] = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}) = -2$$

$$I_3 = \det(\sigma_{ij}) = 0$$

7.5 $u_1=-\gamma a_2+\beta a_3$，$u_2=\gamma a_1-\alpha a_3$，$u_3=-\beta a_2+\alpha a_3$，$\alpha,\beta,\gamma$ 为常数。求位移梯度张量。

解　位移梯度张量$(F_{ij})=\dfrac{\partial u_i}{\partial a_j}=\begin{pmatrix}0 & -\gamma & \beta\\ \gamma & 0 & -\alpha\\ 0 & -\beta & \alpha\end{pmatrix}$。

7.6　$x_1=2a_3$，$x_2=a_1$，$x_3=4a_2$，求位移梯度张量。

解　位移梯度张量$(F_{ij})=\dfrac{\partial x_i}{\partial a_j}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$。

第 9 章　MATLAB 在矩阵和张量运算中的应用

用 MATLAB 求解下面的习题,要求写出 MATLAB 命令行。

9.1　求矩阵$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 2 & 3\\ 4 & 8 & 12 & 16\\ 0 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$的秩。

解

```
>>A=sym('[1 2 3 4; 1, -1 2 3; 4 8 12 16; 0 2 3 1]');
>>Result=rank(A)
Result=3
```

9.2　求矩阵$\begin{pmatrix}t+1 & t\\ 0 & t+5\end{pmatrix}$与$\dfrac{1}{(t+2)(t+5)}$的乘积。

解

```
>>A=sym('[t+1 t;0 t+5]');
>>B=sym('1/((t+2)*(t+5))');
>>Result=A*B
Result=
[  1/(t+2)/(t+5)*(t+1),   1/(t+2)/(t+5)*t]
[                    0,           1/(t+2)]
```

9.3　已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}c & d\\ e & f\end{pmatrix}$。计算 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$。

解

```
>>A=sym('[a b;c d]');
```

```
>>B=sym('[c d;e f]');
>>A*B
ans=
[a*c+b*e,  a*d+b*f]
[c^2+d*e,  c*d+d*f]

>>B*A
ans=
[a*c+c*d,  c*b+d^2]
[e*a+f*c,  b*e+d*f]
```

9.4 求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}8 & 2 & -1\\1 & 6 & 2\\2 & -1 & 1\end{pmatrix}$；(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$。

解 (1)

```
>>A=sym('[8 2,-1;1 6 2;2,-1 1]');
>>Result=inv(A)
Result=
[    8/83,   -1/83,    10/83]
[    3/83,   10/83,   -17/83]
[  -13/83,   12/83,    46/83]
```

(2)

```
>>A=2*eye(4);
>>A=sym(A);
>>Result=inv(A)
Result=
[ 1/2,    0,    0,    0]
[   0,  1/2,    0,    0]
[   0,    0,  1/2,    0]
[   0,    0,    0,  1/2]
```

9.5 求下列矩阵的本征值与本征矢量：

(1) $\begin{pmatrix}2 & 4 & 2\\4 & 8 & 4\\2 & 4 & 2\end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1/2\\0 & 0 & 0\\2 & 0 & -1\end{pmatrix}$。

解 (1)

```
>>A=sym('[2 4 2;4 8 4;2 4 2]');
>>[v,e]=eig(A)
v=
[   1,   0,  1]
[   0,   1,  2]
[  -1,  -2,  1]
e=
[ 0,  0,   0]
[ 0,  0,   0]
[ 0,  0,  12]
```

(2)

```
>>A=sym('[-1 0 1/2;0 0 0;2 0, -1]');
>>[v, e]=eig(A)
v=
[ 1,  0,   1]
[ 0,  1,   0]
[ 2,  0,  -2]
e=
[ 0,  0,   0]
[ 0,  0,   0]
[ 0,  0,  -2]
```

9.6 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$,求 $e^{\boldsymbol{A}t}$。

解

```
>>syms t
>>A=sym('[1,0 0;0 1 0;0 1 1]');
>>Result=expm(A*t)
Result=
[  exp(t),         0,        0]
[       0,    exp(t),        0]
[       0,  t*exp(t),   exp(t)]
```

9.7 求矩阵 $\begin{pmatrix}2 & -i & 3\\1 & 2i & 2\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 的行列式值。

解

```
>>A=sym('[2, -i, 3;1 2*i 2;0 1 1]');
>>Result=det(A)
Result=
-1+5*i
```

9.8 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，计算 $(\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}$。

解

```
>>A=sym('[-1 3;2 1]');
>>Result=inv(A^3-A^2+2*A-2*I)
Result=
[      0,  1/18]
[   1/27,  1/27]
```

9.9 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i}\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵、共轭矩阵以及复共轭矩阵。

解

```
>>A=sym('[-i 1-2i;2 1]');
>>TransA=A.'
TransA=
[      -i,  2]
[  1-2*i,  1]
>>conj_A=conj(A)
conj_A=
[  i,  1+2*i]
[  2,       1]
>>Herm_A=A'
Herm_A=
[       i,  2]
[  1+2*i,  1]
```

9.10 求 $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}x\sin y & x^n+y\\ \dfrac{1}{xy} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\end{pmatrix}$。

解

```
>>A=sym('[x*sin(y) x^n+y;1/(x*y) exp(i*x*y)]');
>>Result=diff(diff(A,'x'),'y')
Result=
```

```
[      cos(y),                                    0]
[  1/x^2/y^2,   i*exp(i*x*y)-y*x*exp(i*x*y)]
```

9.11 求矩阵$\begin{pmatrix} xyz \\ xy \\ yz \end{pmatrix}$对($x \quad y \quad z$)的偏微分。

解

```
>>A=sym('[x*y*z;x*y;y*z]');
>>B=sym('[x y z]');
>>Result=jacobian(A,B)
Result=
[  y*z,   x*z,   x*y]
[    y,     x,     0]
[    0,     z,     y]
```

9.12 把矩阵$\begin{pmatrix} 1/2 & -i \\ i & 1/2 \end{pmatrix}$转化为对角矩阵。

解

```
>>A=sym('[1/2,-i;i 1/2]');
>>[U,V]=jordan(A)
U=
[      1/2,      1/2]
[  -1/2*i,  1/2*i]
V=
[  -1/2,     0]
[     0,   3/2]
```

9.13 解方程$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}+\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=0$。

解

```
>>A=sym('[2 5;1 3]');
>>B=sym('[0 2;1 4]');
>>X=-A\B
X=
[    5,    14]
[   -2,    -6]
```

验算:

```
>>A*X+B
```

```
ans=
[ 0, 0]
[ 0, 0]
```

9.14 解方程 $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}=0$。

解

```
>>A=sym('[2 5;1 3]');
>>B=sym('[0 2;1 4]');
>>X=-B/A
X=
[ 2, -4]
[ 1, -3]
```

验算：

```
>>X*A+B
ans=
[ 0, 0]
[ 0, 0]
```

9.15 求矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$ 列向量的标准正交基。

解

```
>>A=sym('[1,0;2,2;0,1]');
>>Result=colspace(A)
Result=
[   0,   1]
[   1,   0]
[ 1/2,  -1]
```

9.16 在MATAB中生成一个五阶的单位矩阵和一个四阶的随机矩阵。

解

```
>>A=eye(5)
A=
    1  0  0  0  0
    0  1  0  0  0
    0  0  1  0  0
    0  0  0  1  0
    0  0  0  0  1
```

```
>>B=rand(4)
B=
    0.9355    0.0579    0.1389    0.2722
    0.9169    0.3529    0.2028    0.1988
    0.4103    0.8132    0.1987    0.0153
    0.8936    0.0099    0.6038    0.7468
```

9.18　在 MATLAB 中利用 MAPLE 的张量包(tensor)生成一个零阶张量(标量)$[a]$，一个一阶张量(矢量)$[x \quad y \quad z]$，一个二阶张量(矩阵)$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$。

解

```
>>maple('with(tensor)');
>>A=maple('create([],a)')
A=
TABLE([index_char=[], compts=a])
>>B=maple('create([1],array([x,y,z]))')
B=
TABLE([index_char=[1],compts=vector([x,y,z])])
>>C=maple('create([1,-1],array([[a11,a12],[a21,a22]]))')
C=
TABLE([index_char=[1,-1],compts=matrix([[a11,a12],[a21,a22]])])
```

9.19　在 MATLAB 中利用 MAPLE 的张量包(tensor)计算二阶张量$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & xy & z \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$和一阶张量$(m,l,n)$的内积。

```
>>maple('with(tensor)');
>>maple('T:=create([1,-1],  array([[x,0,1],[y,xy,z],[0,0,z]]))');
>>maple('U:=create([1],array([m, l, n]))');
>>innerprod=maple('prod(T,U,[2,1])')
innerprod=
TABLE([index_char=[1],compts=vector([x*m+n,  y*m+xy*l+z*n,  z*n])])
```

附录 C 的部分习题解答

C.1　试用柱面坐标系表示矢量 $\boldsymbol{a}=z\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$。

解　例 C.1 有

$$\boldsymbol{e}_\rho = \cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j} \tag{a}$$
$$\boldsymbol{e}_\varphi = -\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j} \tag{b}$$
$$\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{k} \tag{c}$$

联立解式(a)与(b)得

$$\boldsymbol{i} = \cos\varphi\boldsymbol{e}_\rho - \sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi, \quad \boldsymbol{j} = \sin\varphi\boldsymbol{e}_\rho + \cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= z\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}\\ &= z(\cos\varphi\boldsymbol{e}_\rho - \sin\varphi\boldsymbol{e}_\rho) - 2\rho\cos\varphi(\sin\varphi\boldsymbol{e}_\rho + \cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi) + \rho\sin\varphi\boldsymbol{e}_z\\ &= (z\cos\varphi - 2\rho\sin\varphi\cos\varphi)\boldsymbol{e}_\rho - (z\sin\varphi + 2\rho\cos^2\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi + \rho\sin\varphi\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}a_\rho &= z\cos\varphi - 2\rho\sin\varphi\cos\varphi\\ a_\varphi &= -z\sin\varphi - 2\rho\cos^2\varphi\\ a_z &= \rho\sin\varphi\end{aligned}$$

C.3 试证$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\rho = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\rho$，式中字母上面的圆点表示对时间的导数。

证 根据例 C.1 有

$$\boldsymbol{e}_\rho = \cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{e}_\varphi = -\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\rho = -(\sin\varphi)\dot{\varphi}\boldsymbol{i} + (\cos\varphi)\dot{\varphi}\boldsymbol{j} = -(\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j})\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\varphi = -(\cos\varphi)\dot{\varphi}\boldsymbol{i} - (\sin\varphi)\dot{\varphi}\boldsymbol{j} = -(\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j})\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\rho$$

C.5 试求柱面坐标系中的弧元平方，并确定相应的标量因子。

解 方法一

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$$
$$\mathrm{d}x = -\rho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi + \cos\varphi\mathrm{d}\rho, \quad \mathrm{d}y = \rho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi + \sin\varphi\mathrm{d}\rho, \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}z$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\\ &= (-\rho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi + \cos\varphi\mathrm{d}\rho)^2 + (\rho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi + \sin\varphi\mathrm{d}\rho)^2 + (\mathrm{d}z)^2\\ &= (\mathrm{d}\rho)^2 + \rho^2(\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}z)^2 = h_1^2(\mathrm{d}\rho)^2 + h_2^2(\mathrm{d}\varphi)^2 + h_3^2(\mathrm{d}z)^2\end{aligned}$$

故有标量因子

$$h_1 = h_\rho = 1, \quad h_2 = h_\varphi = \rho, \quad h_3 = h_z = 1$$

方法二

位矢

$$\boldsymbol{r} = \rho\cos\varphi\boldsymbol{i} + \rho\sin\varphi\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\mathrm{d}z\\&=(\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j})\mathrm{d}\rho+(-\rho\sin\varphi\boldsymbol{i}+\rho\cos\varphi\boldsymbol{j})\mathrm{d}\varphi+\boldsymbol{k}\mathrm{d}z\\&=(\cos\varphi\mathrm{d}\rho-\rho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi)\boldsymbol{i}+(\sin\varphi\mathrm{d}\rho+\rho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=(\cos\varphi\mathrm{d}\rho-\rho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi)^2+(\sin\varphi\mathrm{d}\rho+\rho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi)^2+(\mathrm{d}z)^2\\&=(\mathrm{d}\rho)^2+\rho^2(\mathrm{d}\varphi)^2+(\mathrm{d}z)^2\end{aligned}$$

C.6 试求椭圆柱坐标系中的弧元平方,并确定相应的标量因子。

答 $\mathrm{d}s^2=a^2(\sinh^2u+\sin^2v)(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)+\mathrm{d}z^2$

$h_u=h_v=a\sqrt{\sinh^2u+\sin^2v}$, $h_z=1$

C.7 试用球面坐标系解题C.5。

解 $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x&=-r\sin\theta\sin\varphi\mathrm{d}\varphi+r\cos\theta\cos\varphi\mathrm{d}\theta+\sin\theta\cos\varphi\mathrm{d}r\\\mathrm{d}y&=r\sin\theta\cos\varphi\mathrm{d}\varphi+r\cos\theta\sin\varphi\mathrm{d}\theta+\sin\theta\sin\varphi\mathrm{d}r\\\mathrm{d}z&=-r\sin\theta\mathrm{d}\theta+\cos\theta\mathrm{d}r\\\mathrm{d}s^2&=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2=(\mathrm{d}r)^2+r^2(\mathrm{d}\theta)^2+r^2\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2\end{aligned}$$

故标量因子为

$$h_1=h_r=1,\quad h_2=h_\theta=r,\quad h_3=h_\theta=r\sin\theta$$

C.9 试求柱面坐标系与球面坐标系中的体积元。

解 正交曲线坐标系 u_1,u_2,u_3 中的体积元是

$$\mathrm{d}V=h_1h_2h_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3$$

(1) 柱面坐标系

$$u_1=\rho,\quad u_2=\varphi,\quad u_3=z;\quad h_1=1,\quad h_2=\rho,\quad h_3=1$$

故有

$$\mathrm{d}V=(1)(\rho)(1)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

(2) 球面坐标系

$$u_1=r,\quad u_2=\theta,\quad u_3=\varphi;\quad h_1=1,\quad h_2=r,\quad h_3=r\sin\theta$$

故有

$$\mathrm{d}V=(1)(r)(r\sin\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

C.10 试求椭圆柱坐标系中的体积元。

答 $a^2(\sinh^2u+\sin^2v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}z$。

C.11 设 u_1,u_2,u_3 是正交曲线坐标,试证 x,y,z 相对于 u_1,u_2,u_3 的雅可比

为 $h_1h_2h_3$。

证

$$J\left(\frac{x,y,z}{u_1,u_2,u_3}\right)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1}\\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2}\\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial u_1}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial u_1}\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial u_2}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial u_2}\boldsymbol{k}\right)$$

$$\times\left(\frac{\partial x}{\partial u_3}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial u_3}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial u_3}\boldsymbol{k}\right)$$

$$=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}$$

$$=h_1\boldsymbol{e}_1\cdot h_2\boldsymbol{e}_2\times h_3\boldsymbol{e}_3=h_1h_2h_3\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=h_1h_2h_3$$

C.12 试求柱面坐标系与球面坐标系中的雅可比。

答 (1)ρ；(2) $r^2\sin\theta$。

C.13 设 u_1,u_2,u_3 为广义坐标，试证$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1},\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2},\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}$与$\nabla u_1,\nabla u_2,\nabla u_3$ 为互逆系。

证 我们所要证明的是$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_p}\cdot\nabla u_q=\begin{cases}1, p=q\\0, p\neq q\end{cases}$，式中 p 与 q 可以是 1,2,3 中的任何值。

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3$$

左点乘∇u_1，有

$$\nabla u_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}u_1+\left(\nabla u_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\right)\mathrm{d}u_1+\left(\nabla u_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\right)\mathrm{d}u_2+\left(\nabla u_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}\right)\mathrm{d}u_3$$

或

$$\nabla u_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}=1,\quad \nabla u_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}=0,\quad \nabla u_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}=0$$

同理，左点乘$\nabla u_2,\nabla u_3$，可得所证结果。

C.14 试求柱面坐标系与球面坐标系中的$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1},\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2},\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}$及$\nabla u_1,\nabla u_2,\nabla u_3$，并证明这些系中 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{E}_3$。

解 (1) 柱面坐标系

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j},\quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}=-\rho\sin\varphi\boldsymbol{i}+\rho\cos\varphi\boldsymbol{j},\quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}=\boldsymbol{k}$$

$$\nabla\rho = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j}, \quad \nabla\varphi = \frac{-\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}}{\rho}, \quad \nabla z = \boldsymbol{k}$$

（2）球面坐标系

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + r\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} - \sin\theta\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{i} + r\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{j}$$

$$\nabla r = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}$$

$$\nabla\theta = \frac{xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} - (x^2+y^2)\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} - \sin\theta\boldsymbol{k}}{r}$$

$$\nabla\varphi = \frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2} = \frac{-\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}}{r\sin\theta}$$

C.15 试证$\left\{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}\right\}\{\nabla u_1\cdot\nabla u_2\times\nabla u_3\}=1$。

证 由题C.13可知，$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}$与$\nabla u_1, \nabla u_2, \nabla u_3$是互逆矢量组，于是有1.26题(a)中的结果。

由题C.13有

$$\nabla u_1\cdot\nabla u_2\times\nabla u_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{vmatrix} = J\left(\frac{u_1,u_2,u_3}{x,y,z}\right)$$

所以

$$J\left(\frac{x,y,z}{u_1,u_2,u_3}\right)J\left(\frac{u_1,u_2,u_3}{x,y,z}\right) = 1$$

即为所证。

C.16 设有$x^2-y^2=2u_1\cos u_2$，$xy=u_1\sin u_2$，$z=u_3$，(1)证明该系为正交系；(2)求雅可比。

答 （2）$\frac{1}{2}$。

C.17 推导正交曲线坐标系中$\nabla\Phi$的表示式。

解 设$\nabla\Phi=f_1\boldsymbol{e}_1+f_2\boldsymbol{e}_2+f_3\boldsymbol{e}_3$，式中$f_1,f_2,f_3$待定。

因为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3 = h_1\boldsymbol{e}_1\mathrm{d}u_1 + h_2\boldsymbol{e}_2\mathrm{d}u_2 + h_3\boldsymbol{e}_3\mathrm{d}u_3$$

又有

$$\mathrm{d}\Phi = \nabla\Phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = h_1 f_1 \mathrm{d}u_1 + h_2 f_2 \mathrm{d}u_2 + h_3 f_3 \mathrm{d}u_3 \tag{a}$$

但

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3 \tag{b}$$

(a)=(b),故有

$$f_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \quad f_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \quad f_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \Phi}{\partial u_3}$$

$$\nabla\Phi = \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} + \frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}\frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\frac{\partial \Phi}{\partial u_3}$$

算子∇可表示为

$$\nabla = \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}$$

C. 18 推导球面坐标系中$\nabla\psi$与$\nabla \cdot \boldsymbol{a}$的表示式。

答 (1) $\nabla\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$

(2) $\nabla \cdot \boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta a_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$

C. 19 设 u_1, u_2, u_3 为正交坐标系,(1)证明$|\nabla u_p| = h_p^{-1}$, $p=1,2,3$;(2)证明$\boldsymbol{e}_p = \boldsymbol{E}_p$。

证 (1) 在题 C. 17 中,令 $\Phi = u_1$,则

$$\nabla u_1 = \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}$$

于是

$$|\nabla u_1| = \frac{|\boldsymbol{e}_1|}{h_1} = h_1^{-1} \quad (\text{因} \ |e_1| = 1)$$

同理,令 $\Phi = u_2$ 或 u_3 时,可得

$$|\nabla u_2| = h_2^{-1}, \quad |\nabla u_3| = h_3^{-1}$$

(2) 定义 $\boldsymbol{E}_p = \frac{\nabla u_p}{|\nabla u_p|}$,由上述证明有

$$\boldsymbol{E}_p = h_p \nabla u_p = \boldsymbol{e}_p$$

C. 20 给定下列坐标变换 $u_1 = xy, 2u_2 = x^2 + y^2, u_3 = z$。(1)证明坐标系是正交的;(2)求雅可比;(3)求 $\mathrm{d}s^2$。

答 (2) $\frac{1}{y^2 - x^2}$

(3) $$ds^2=\frac{(x^2+y^2)(du_1^2+du_2^2)-4xydu_1du_2}{(x^2-y^2)^2}+du_3^2$$

$$=\frac{u_2(du_1^2+du_2^2)-2u_1du_1du_2}{2(u_2^2-u_1^2)}+du_3^2$$

C.21 设 u_1,u_2,u_3 是正交坐标系，试证 $\boldsymbol{e}_1=h_2h_3\nabla u_2\times\nabla u_3$，并求 $\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 与此相应的表示式。

证 由题 C.19 可知

$$\nabla u_1=\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1},\quad \nabla u_2=\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2},\quad \nabla u_3=\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}$$

于是

$$\nabla u_2\times\nabla u_3=\frac{\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3}{h_2h_3}=\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2h_3}$$

即

$$\boldsymbol{e}_1=h_2h_3\nabla u_2\times\nabla u_3$$

同理可得

$$\boldsymbol{e}_2=h_3h_1\nabla u_3\times\nabla u_1,\quad \boldsymbol{e}_3=h_1h_2\nabla u_1\times\nabla u_2$$

C.22 试求半径为 a 的球面上的弧元。

答 $ds^2=a^2[d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2]$。

C.23 试证正交坐标系中，

$$\nabla\times(a_1\boldsymbol{e}_1)=\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(a_1h_1)-\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(a_1h_1)$$

证
$$\begin{aligned}\nabla\times(a_1\boldsymbol{e}_1)&=\nabla\times(a_1h_1\nabla u_1)\\&=\nabla(a_1h_1)\times\nabla u_1+a_1h_1\nabla\times\nabla u_1\\&=\nabla(a_1h_1)\times\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}+\boldsymbol{0}\\&=\left[\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(a_1h_1)+\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(a_1h_1)+\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(a_1h_1)\right]\times\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\\&=\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(a_1h_1)-\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(a_1h_1)\end{aligned}$$

C.25 推导正交坐标系中 curl$\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}$ 的表示式。

解
$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{a}&=\nabla\times(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)\\&=\nabla\times(a_1\boldsymbol{e}_1)+\nabla\times(a_2\boldsymbol{e}_2)+\nabla\times(a_3\boldsymbol{e}_3)\end{aligned}$$

根据题 C.23，有

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\left[\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(a_1h_1)-\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(a_1h_1)\right]+\left[\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_1}(a_2h_2)\right.$$
$$\left.-\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(a_2h_2)\right]+\left[\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}(a_3h_3)-\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(a_3h_3)\right]$$

$$= \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(a_3h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(a_2h_2)\right] + \frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(a_1h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(a_3h_3)\right] + \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(a_2h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(a_1h_1)\right]$$

即

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{a} = \nabla\times\boldsymbol{a} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ a_1h_1 & a_2h_2 & a_3h_3 \end{vmatrix}$$

C. 26 推导正交坐标系中 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\nabla\cdot\boldsymbol{a}$ 的表示式。

答 $\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial u_1}(a_1h_2h_3)+\dfrac{\partial}{\partial u_2}(a_2h_3h_1)+\dfrac{\partial}{\partial u_3}(a_3h_1h_2)\right]$。

C. 27 推导正交坐标系中$\nabla^2\Psi$ 的表示式。

解 由题 C. 17 有

$$\nabla\Psi = \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\frac{\partial\Psi}{\partial u_1} + \frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}\frac{\partial\Psi}{\partial u_2} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\frac{\partial\Psi}{\partial u_3}$$

设 $\boldsymbol{a}=\nabla\Psi$,则

$$a_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Psi}{\partial u_1},\quad a_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Psi}{\partial u_2},\quad a_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Psi}{\partial u_3}$$

应用题 C. 26 的结果,可得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \nabla\cdot\nabla\Psi = \nabla^2\Psi$$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Psi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Psi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Psi}{\partial u_3}\right)\right]$$

C. 28 试写出椭圆柱坐标系中的方程$\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\Phi$。

答 $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=a^2(\sinh^2 x+\sin^2 y)\Phi$。

C. 29 推导柱面坐标系中$\nabla\times\boldsymbol{a}$ 与 $\nabla^2\Phi$ 的表示式。

解 (1)

$$\nabla\times\boldsymbol{a} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1a_1 & h_2a_2 & h_3a_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_\rho & \rho a_\varphi & a_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho}\left\{\left[\frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho a_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\rho + \left(\rho\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \rho\frac{\partial a_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho a_\varphi) - \frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_z\right\}$$

$$(2)\ \nabla^2\Phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{(1)(\rho)(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

C.30 推导柱面坐标系中$\nabla\Phi$与$\nabla\cdot\boldsymbol{a}$的表示式。

答 $\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho a_\rho)+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial z}(\rho a_z)\right]$$

C.31 推导球面坐标系中$\nabla^2\Psi$的表示式。

解 $\nabla^2\Psi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Psi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Psi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Psi}{\partial u_3}\right)\right]$

$$=\frac{1}{(1)(r)(r\sin\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{(r)(r\sin\theta)}{(1)}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{(r\sin\theta)(1)}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{(1)(r)}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right]$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}$$

C.32 推导球面坐标系中$\nabla\times\boldsymbol{a}$的表示式。

答 $\nabla\times\boldsymbol{a}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta a_\varphi)-\frac{\partial}{\partial\varphi}(ra_\theta)\right]\boldsymbol{e}_r+\left[\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta a_\varphi)\right]r\boldsymbol{e}_\theta+\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\theta)-\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right]r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\right\}$